例题

2022年5月28日 星期六　上午8:04

一、反常积分.

例. $g(x)$在$[a,+\infty)$有定义, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.
判断 $\int_a^{+\infty} g(x)\cos x\,dx$. $\int_a^{+\infty} g(x)\sin x\,dx$ 收敛性.

例. $a>0$, $0<p\le1$. $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 和 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 都条件收敛.

例. 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac1n)}{n}$的绝对收敛和条件收敛情况.

例. $k\in(0,1)$, $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

例. $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$

例. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\arctan x}{2+x^\beta}dx$ $(\beta>0)$

例. 对$\beta>0$, 反常积分$\int_\beta^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$收敛.
其中$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 且$f(0)=A$.
求证: $\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=A\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

例. $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$

例. $\int_0^{+\infty}x\sin x^4\,dx$

例. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

例. $g(x)=f(x)-2e^{-x}\int_0^{x}e^t f(t)\,dt$
证明: 成立 $\int_0^{+\infty}g^2(x)dx=\int_0^{+\infty}f^2(x)\,dx$

例. 研究反常积分的收敛性.
(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^p}dx$
(2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$
(3) $\int_0^1 x^p(\ln\frac1x)^q dx$

例. 研究反常积分的条件收敛和绝对收敛.
(1) $\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\,dx$
(2) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$

1. 研究反常积分的收敛性.
(1) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$.
(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$
(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos x}$.

2. 研究反常积分的条件收敛和绝对收敛.
(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$.
(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}dx$.
(3) $\int_0^1\frac{\sin\frac1x}{x^p}dx$

二、含参变量的积分.

例. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

例. 设 $I(u)=\int_0^{u^2}\frac{\sin ux}{x}dx$, 求$I'(u)$.

例. $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}$收敛, 但$\frac{x}{1+x^6\sin^2x}$非负连续无界.
* $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^\alpha\sin^2x}dx$ 的收敛性.

例. $f(x)\ge0$ 在$[a,+\infty)$任意有限区间可积.
$\{a_n\}$单增, $a_n\to\infty$.
证明: $\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛于l
$\Longleftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x)dx$ 收敛于l.

三、含参变量的反常积分.

✓例. $\int_a^{+\infty}ue^{-ux}dx$

例. $\int_0^{+\infty}e^{-(a+u^2)x}\sin x\,dx$ 对$\forall u\in[0,+\infty)$
✓$\int_0^{+\infty}e^{-(a+u^2)x}\sin x\,du$ 对$\forall x\in[0,+\infty)$.

例. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{x\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 在$\beta\ge\beta_0>0$上.
(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 在$\beta>0$上

例. 设$0<p<1$, $\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}$ 在$u\ge0$上一致收敛

例. $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}$收敛, 但$\frac{x}{1+x^6\sin^2x}$非负连续无界.
讨论$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^\alpha\sin^2x}$的收敛性.

例. 研究函数在指定区间上的一致收敛.
✓(1) $\varphi(u)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xu}{x}dx$. $I_1=[a,b]$. $I_2=[0,b]$
(2) $\int_0^{+\infty}e^{-u^2(1+x^2)}\sin u\,dx$. $u>0$.

例. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.

✓例. 计算 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta x\,dx$.

例. 计算 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta x\,dx$.

例. 讨论 $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$
关于α在$[\alpha_0,+\infty)$上的一致收敛.
关于α在$(0,+\infty)$上.

✓例. 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+c^2x^2)}{1+x^2}dx$ $(c>0)$.

例. 不借助 Weierstrass 判别一致收敛.
$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ux}dx$ 的一致收敛性.

例. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx$