Fourier变换

2022年2月18日 星期五　　下午4:09

一、Fourier积分.

1. 引入

考虑 Fourier 级数的复数形式

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{inwx}$，$F_{\pm n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{\mp inwx} dx$.

且 $w = \frac{\pi}{l}$，$F_{-n} = \overline{F_n}$.

记 $\lambda_n = nw = \frac{n\pi}{l}$，$\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1}$，

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-inw(\xi - x)} d\xi$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-i\lambda_n(\xi - x)} d\xi \, \Delta\lambda_n$.

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta\lambda_n e^{i\lambda_n x} H_n$.

其中 $H_n = \int_{-l}^{l} e^{-i\lambda_n\xi} f(\xi) d\xi$.

2. 定理.

如果定义在整个数轴上的函数 $f(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑，且在区间 $(-\infty, +\infty)$ 可积并绝对可积，则对任何 x 有 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$.

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda(\xi - x)} d\xi$

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos\lambda(x-\xi) d\xi)$

$= \int_{0}^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x) d\lambda$

其中 $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi \, d\xi$，

$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi \, d\xi$.

二、Fourier变换.

1. 定义

令 $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$，

则 $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$.

$F(\lambda)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换/象函数.

$f(x)$ 称为 $F(\lambda)$ 的逆变换/象原函数.

2. 特殊形式

① 如果 $f(x)$ 为偶，则 $f(x)\sin\lambda x$ 为奇，

$f(x) \to F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda t - i\sin\lambda t) dt$

$= 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \, dt$　余弦变换

$F(\lambda) \to f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) d\lambda$

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x \, d\lambda$.

② 如果 $f(x)$ 为奇函数，则

$f(x) \to F(\lambda) = -2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t \, dt$

令 $G(\lambda) = iF(\lambda) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\lambda t \, dt$ 正弦变换.

$G(\lambda) \to f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} G(\lambda)\sin\lambda x \, d\lambda$.

例. $f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$　$(\beta > 0)$

$f(x) \to F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$

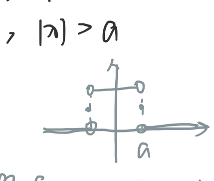
$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta + i\lambda)t} dt$

$= -\frac{1}{\beta + i\lambda} e^{-(\beta+i\lambda)t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\beta + i\lambda}$.

$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} e^{i\lambda x} d\lambda = \begin{cases} f(x), & x \ne 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

例. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & x = \pm a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ 的 Fourier 变换

偶函数



$F(\lambda) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \, dt$

$= 2\left(\int_{0}^{a} 1 \times \cos\lambda t\right) dt$

$= \frac{2}{\lambda}\sin\lambda t\Big|_{0}^{a} = \frac{2}{\lambda}\sin\lambda a$.

$f(x)$ 在不连续点 $x = \pm a$ 已定义为左右极限的平均值，则反演公式

$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos\lambda x \, d\lambda$ 恒成立.

例. 求 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ (x > 0)$ 的正弦变换.

正弦 → 奇函数，$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-x}}, & x < 0 \end{cases}$

$G(\lambda) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t \, dt$

$= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\lambda t \, dt = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$.

* 收敛定理不是必要的.

3. 基本性质

① 线性性.

② 频移特性. $F[f(x)e^{-i\lambda_0 x}] = F(\lambda + \lambda_0)$.

③ 微分关系. $F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)]$

$F[f^{(k)}(x)] = (i\lambda)^k F[f(x)]$.

④ 微分特性. $F'(\lambda) = F[-ix f(x)]$.

定义卷积. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt = f * g$，和普通乘法性质类似.

⑤ 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积且绝对可积，则 $f*g$ 也可积且绝对可积，

$F[f*g] = F[f]F[g]$.

$F[f*g] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\right] e^{-i\lambda x} dx$

令 $x = t + \xi$，$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(t)dt\right] e^{-i\lambda t} e^{-i\lambda\xi} d\xi$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt$.

$= F[f]F[g]$.

⑥ $f(x)$ 可积且平方可积，则有

$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$.

令 $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x+t) dt$，

$F[g] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\lambda x} dx$　　$x + t = u$，$x = u - t$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x+t) dt \, e^{-i\lambda x} dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(u) e^{-i\lambda(u-t)} dt \, d(u-t)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\lambda u} du$

$= \overline{F(\lambda)} F(\lambda) = |F(\lambda)|^2$.

$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda x} d\lambda$

$x = 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot f(0+t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda\cdot 0} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$

例. $f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}\sin w_0 x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$，$F[g(x)] = F(\lambda) = \frac{1}{\beta + i\lambda}$

$f(x) = g(x)\sin w_0 x = -\frac{i}{2}(e^{iw_0 x} - e^{-iw_0 x}) g(x)$.

$\therefore F[f] = -\frac{i}{2}(F[e^{iw_0 x} g(x)] - F[e^{-iw_0 x} g(x)])$

$= -\frac{i}{2}(F(\lambda - w_0) - F(\lambda + w_0))$

$= -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\beta + i(\lambda - w_0)} - \frac{1}{\beta + i(\lambda + w_0)}\right)$

$= \frac{w_0}{(\beta + i\lambda)^2 + w_0^2}$.

---

1. Fourier积分.

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{inwx}$，$F_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-inwx} dx$.

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-inw(\xi - x)} d\xi$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\frac{n\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-i\frac{n\pi}{l}(\xi - x)} d\xi$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\Delta\lambda_n e^{-i\lambda_n x} H_n$，

其中 $H_n = \int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-i\lambda_n\xi} d\xi$.

$l \to +\infty$，$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{-\lambda\xi}$.

任何有限区间分段可微，绝对可积，

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\lambda\xi} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

2. Fourier变换

$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$.

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda(\xi - x)} d\xi$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\cos\lambda(\xi - x) - i\sin\lambda(\xi - x)] d\xi$　（偶　奇）

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi) d\xi$

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\cos\lambda x \, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\sin\lambda x \, d\xi\right)$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x) d\lambda$.

$f(x)$ 为偶函数 → 余弦变换.

$F_c(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda t - i\sin\lambda t) dt$　（奇）

$= 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \, dt$.

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) d\lambda$

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x \, d\lambda$.

$f(x)$ 为奇函数 → 正弦变换

$F_s(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda t - i\sin\lambda t) dt$　（奇）

$= -2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t \, dt$

$G_s(\lambda) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t \, dt$.

$f(x) = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_s(\lambda) e^{i\lambda x} dx$

$= \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_s(\lambda)(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) dx$　（奇）

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} G_s(\lambda)\sin\lambda x \, dx$

例. $f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{0}^{\infty} e^{(-i\lambda - \beta)x} dx$.

$= \frac{e^{-(\beta + i\lambda)x}}{\beta + i\lambda}\Big|_{+\infty}^{0}$ → $\lim_{x\to+\infty}\left|e^{-(\beta + i\lambda)x}\right|$（模）$= \lim_{x\to+\infty} e^{-\beta x} = 0$

$= \frac{1}{\beta + i\lambda} - 0$.

（逆变换：$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} e^{i\lambda x} d\lambda = \left\{ \frac{1}{2}\quad x = 0 \right)$

例. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & x = \pm a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$

$F(\lambda) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \, dt$

$= 2\int_{0}^{a} \cos\lambda t \, dt = \frac{2\sin\lambda a}{\lambda}$.

$\therefore F(\lambda) = \begin{cases} \frac{2\sin\lambda a}{\lambda}, & \lambda \ne 0 \\ 2a, & \lambda = 2a. \end{cases}$ 补充定义.

（逆变换 $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos\lambda x \, d\lambda$，$x \in \mathbb{R}$）.

例. $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0, x \ge 0)$

余弦 $F_c(\lambda) = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\cos\lambda t \, dt$　　$\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\lambda)t} dt = \frac{1}{a + i\lambda} = \frac{a - i\lambda}{a^2 + \lambda^2}$

$= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-i\lambda t} dt$　（好象）

$= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\lambda)t} dt$

$= -2\frac{e^{-(a+i\lambda)t}}{a + i\lambda}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{2a}{a^2 + \lambda^2}$

正弦 $G_s(\lambda) = \frac{2\lambda}{a^2 + \lambda^2}$.

3. 性质

① 线性性

② 频移特性：$F(f(x)e^{-i\lambda_0 x}) = F(\lambda + \lambda_0)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda_0 x} e^{-i\lambda x} dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\lambda + \lambda_0)x} dx$

③ 微分关系：$f(\pm\infty) = 0$，$F(f'(x)) = i\lambda F(f(x))$

$F(f'(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx$

$= f(x) e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$

$f^{(k)}(\pm\infty) = 0$，$F(f^{(k)}(x)) = (i\lambda)^k F(f(x))$

④ 微分特性：$F'(\lambda) = F(-ix f(x))$

⑤ 卷积运算　$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$

满足 $(f*g) = (g*f)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$

$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(\xi) g(x-\xi) d(-\xi)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$

$(f*g)*h = f*(g*h)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x-t) h(t) dt$

$(f+g)*h = f*h + g*h$

$f(x)*g(x)$ 可积且绝对可积，且

$F(f*g) = F(f)F(g)$

$F(f*g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt\right) e^{-i\lambda x} dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) e^{-i\lambda[(x-t)+t]} dt \, dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(t) e^{-i\lambda\xi} e^{-i\lambda t} d\xi \, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt$.

逆变换定义 $F(f*g) = F(\lambda)G(\lambda)$

⑥ Parseval 等式. $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$

令 $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x+t) dt$

$F(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\lambda x} dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x+t) e^{-i\lambda x} dt \, dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-i\lambda x} dx \, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\lambda u} du \, e^{i\lambda t} dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt$

$= F(\lambda)\overline{F(\lambda)}$　　实&复函数的区分.

由逆变换，$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)^2 e^{i\lambda x} d\lambda$

则取 $x = 0$ 时，$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$.

例. $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$，$T(x, 0) = f(x)$.

令 $u(\lambda, t) = F[T(x, t)]$（$T$ 的变换）.

代入原方程，$\frac{du}{dt} = -\lambda^2 u$（性质），$u(\lambda, 0) = F(\lambda)$

⇓

$u(\lambda, t) = F(\lambda) e^{-\lambda^2 t}$

作反变换，$T(x, t) = F^{-1}(F(\lambda) e^{-\lambda^2 t})$

$= F^{-1}(F(\lambda)) * F^{-1}(e^{-\lambda^2 t})$（性质）

反变换，$F^{-1}(e^{-\lambda^2 t}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x \, d\lambda$.

$= \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\cos\frac{\lambda x}{\sqrt{t}} d\lambda$

$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\therefore T(x, t) = f(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

例. $f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}\sin w_0 x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

令 $g(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$F(g(x)) = \frac{1}{\beta + i\lambda}$，

$f(x) = g(x)\sin w_0 x = -\frac{i}{2}(e^{iw_0 x} - e^{-iw_0 x}) g(x)$

$F(f) = -\frac{i}{2}[F(e^{iw_0 x} g(x)) - F(e^{-iw_0 x} g(x))]$

$= -\frac{i}{2}[F(\lambda - w_0) - F(\lambda + w_0)]$

$= -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\beta + i(\lambda - w_0)} - \frac{1}{\beta + i(\lambda + w_0)}\right]$