Fourier级数

2022年2月16日 星期三 上午10:36

一、函数的 Fourier 级数

1. 引入

① 函数周期性

$f(x+T)=f(x)$, $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

延拓 $F(x)=\begin{cases} f(x-2nl), & (2n-1)l<x<(2n+1)l \\ \frac{f(l)+f(-l)}{2}, & x=(2n+1)l \end{cases}$

奇偶延拓

② 三角函数系的正交性

三角函数系：$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx \dots$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\delta_{mn}$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\delta_{mn}$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0$

定义内积 $(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$

可知三角函数两两正交.

2. Fourier 级数

假设函数可以展开成 Fourier 级数

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$f(x)\to(a_n,b_n)\to\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

① Dirichlet 定理

如果函数在有限区间上逐段光滑，则它的 Fourier 级数在整个数轴上都收敛，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

如果函数处处连续，且在任何有限区间上逐段光滑，则它的 Fourier 级数在整个数轴上绝对一致收敛于 $f(x)$.

例. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\pi \\ 0, & -\pi\le x<0 \end{cases}$ 展成 Fourier 级数.

系数 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$f(x)$ 满足 Dirichlet 条件，级数收敛

$\therefore \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]=\begin{cases} f(x), & x\ne(2k-1)\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x=(2k-1)\pi \end{cases}$

例. 设 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=|x|$，延拓成周期.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}=\begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$

展开式只含余弦函数项，一致收敛

余弦级数，正弦级数

③ 复数形式

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+ib_n\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{2}\right)$

$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right)$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{inx}$

其中 $F_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$

$F_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

3. Bessel 不等式与平方平均收敛

① $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 一致收敛于 $f(x)$，即前 n 项和满足 $\lim_{n\to\infty}\sup|S_n(x)-f(x)|=0$

② 对可积且平方可积的函数定义内积

$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$

$\|f-g\|=\sqrt{(f-g,f-g)}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2dx}$

对可积且平方可积的函数，

计算 Fourier 系数，构造级数 $S_n(x)$.

当 $n\to\infty$ 时，若 $S_n(x)\to f(x)$，则平方平均收敛.

③ 对 $\forall g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$

$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g_n(x)]^2dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}g_n^2(x)dx$

$\alpha_k=a_k$, $\beta_k=b_k$ 时，Δ_n 最小.

$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\ge0$

$\Rightarrow$ Bessel 不等式

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

取等：Parseval 等式

$\therefore \lim_{n\to\infty}\|S_n-f\|^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx=0$

定义在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积的函数 $f(x)$，其 Fourier 级数部分和平方平均收敛于 $f(x)$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$

二、广义 Fourier 级数

1. 引入

令 $R[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上可积且平方可积的函数全体，对于其中任意两个函数，内积为 $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$.

若有 $(\varphi_m,\varphi_n)=\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\begin{cases} 0, & m\ne n \\ 1, & m=n \end{cases}$

则函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 中的规范正交函数系

例. $P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 是 $[-1,1]$ 上的正交系.

$(P_m(x),P_n(x))=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^mm!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\cdot\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$

$n\ne m$：分部积分，$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$

$n=m$：$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$

$\therefore P_n(x)$ 是正交系，但不是规范正交系.

$\therefore \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ 即为规范正交系

2. 定义

① $f(x)\in R[a,b]$，$\{\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\}$ 是 $R[a,b]$ 中的一组规范正交系，则可以构造广义 Fourier 系数 $c_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$，构造 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$

② 前 n 项和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$，平方平均偏差 $\Delta_n=\int_a^b[f(x)-T_n(x)]^2dx=\int_a^b f^2dx-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$

当 c_n 都是广义 Fourier 系数时，Δ_n 最小，Bessel 不等式 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\le\int_a^b f^2(x)dx=\|f\|$.

③ Parseval 等式 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\|f\|^2$，级数 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 平方平均收敛于 $f(x)$.

④ 对 $\forall f(x)\in R[a,b]$，广义 Fourier 级数平方平均收敛于 $f(x)$，则称规范正交系是完备的.

3. 定理

设 $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ 是 $R[a,b]$ 中一个完备的规范正交系，则

① 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)\equiv0$ $\Leftrightarrow$ 广义 Fourier 系数为 0

② 如果从 $\{\varphi_n(x)\}$ 中删去一个函数，则剩余函数系不再完备.

③ 设 $\int_a^b\varphi_n(x)dx$ ……，若添加新函数，则新的函数系不是规范正交系.

---

1. 基本知识

① $\begin{cases} \frac{\partial^2T}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t} \\ T(0,t)=T(l,t)=0 \\ T(x,0)=f(x). \end{cases}$

分离变量 $T(x,t)=\varphi(x)\psi(t)$

$\varphi''(x)\psi(t)=k^2\varphi(x)\psi'(t)$

$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=\frac{k^2\psi'(t)}{\psi(t)}=-\lambda$

$\begin{cases} \varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0 \\ \varphi(0)=\varphi(l)=0 \end{cases}$

$k^2\psi'(t)+\lambda\psi(t)=0$.

若 $\lambda<0$. 设 $\lambda=-w^2$, $w>0$.

则 $\varphi(x)=A\cosh wx+B\sinh wx$. $A=B=0$.

若 $\lambda=0$. $A=B=0$.

若 $\lambda>0$，设 $\lambda=w^2$，

则 $\varphi(x)=A\cos wx+B\sin wx$.

$A=0$, $B\ne0$, $\sin wl=0$, $w=\frac{n\pi}{l}$

$\therefore \lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$, $\varphi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$

$k=1$ 时，$T_n(x,t)=b_ne^{-(\frac{n\pi}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$.

$f(x)=T(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$.

① 周期函数.

$f(x+T)=f(x)$. T 为一个周期.

作变换 $x=\frac{T}{2\pi}t$, $t=\frac{2\pi}{T}x$.

$g(t)=g(\frac{2\pi}{T}x)=f(x)=f(\frac{T}{2\pi}t)$，

2π 是 $f(x)$ 的一个周期.

② 周期延拓.

$f(x)$ 定义在 $[-l,l]$ 上，$l>0$，

定义 $F(x)=\begin{cases} f(x-2nl), & (2n-1)l<x<(2n+1)l \\ \frac{f(l)+f(-l)}{2}, & x=(2n+1)l. \end{cases}$

③ 奇延拓和偶延拓.

$f_e(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le l \\ f(-x), & -l\le x<0. \end{cases}$

$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\le l \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & -l\le x<0. \end{cases}$

④ 三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$.

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$. $m,n\in N$, $m\ne n$.

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0$, $m,n\in N^*$, $m\ne n$.

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0$, $m\in N$, $n\in N^*$.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot1\,dx=2$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\,dx=1$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2nx\,dx=1$.

假设 $f(x)$ 可以展开为三角函数系

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$f(x)\cos mx=\frac{a_0}{2}\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\cos mx$.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{a_0}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos mx\,dx+\dots$

2. Fourier 级数.

① $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$

$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx$.

需要保证 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积.

可积：无瑕点. 绝对可积：有瑕点时.

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

② 定理：$f(x)$ 在区间上分段可微，则其 Fourier 级数在整个数轴上收敛，且

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

例. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\pi \\ 0, & -\pi\le x\le0. \end{cases}$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$

$\therefore \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$

$=\begin{cases} f(x), & x\ne(2k-1)\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x=(2k-1)\pi \end{cases}$

③ 有限区间 $[a,b]$ 上.

取 $x_0=\frac{a+b}{2}$, $l=\frac{b-a}{2}$. $t=x-x_0$（平移）.

$f(x)=f(t+x_0)=g(t)=g(x-x_0)$, $x-x_0\in[-l,l]$.

$g(t)\sim\frac{\tilde a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+\tilde b_n\sin\frac{n\pi t}{l})$

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde a_n\cos\frac{n\pi(x-x_0)}{l}+\tilde b_n\sin\frac{n\pi(x-x_0)}{l})$

$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a})$

例. $f(x)=\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的级数.

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a-n)x+\cos(a+n)x]dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}+\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right]$

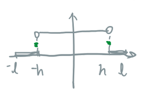
$=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{(a^2-n^2)}$. $n=0,1,2\dots$

$b_n=0$.

$\therefore \cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right]$.

特别取 $x=0$，$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2a}{a^2-n^2}$.

例. 求 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2h}, & |x|<h \\ 0, & h\le|x|\le l. \end{cases}$ 的级数.



（间断处左右极限的平均）

偶延拓：会连续.

奇延拓：需 $x=0$ 处为 0，才处处连续.

3. 复数形式.

欧拉公式. $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$.

$\Rightarrow \cos n\omega x=\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}$, $\sin n\omega x=\frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2}(-i)$.

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$

$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}+ib_n\frac{e^{-in\omega x}-e^{in\omega x}}{2}\right)$

$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega x}\right]$

$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{in\omega x}$

$F_0=\frac{a_0}{2}$, $F_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $F_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$.

即 $F_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)(\cos n\omega x-i\sin n\omega x)dx$

$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-in\omega x}dx$.

2. 平方平均收敛.

① 可积.

绝对可积.

平方可积.

有瑕点：绝对可积 $\Rightarrow$ 可积.

可积不一定平方可积.

无瑕点：（黎曼）可积 $\Rightarrow$ 平方可积.

$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$，依然可积.

$\downarrow$ $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

构成线性空间.

度量（模长）$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

$\therefore L^2[-\pi,\pi]$ 上 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt\pi},\frac{\sin nx}{\sqrt\pi}\dots\}$ 正交系.

① 平方平均收敛

对函数 f，存在函数列 $\{f_n\}$ 使

$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_a^b(f_n(x)-f(x))^2dx=0$.

对任意一个函数 $f\in L^2[-\pi,\pi]$.

$g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$

$\Delta_n=\|f-g_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g_n(x))^2dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}g_n^2(x)dx$

对交叉项计算：

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)dx=\frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k\int f(x)\cos kx\,dx+\beta_k\int f(x)\sin kx\,dx]$

$=\pi[\frac{\alpha_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)]$.

对含关平方项计算：

$\int_{-\pi}^{\pi}g_n^2(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)]^2dx$

$=\pi[\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)]$ 交叉项积分为0.

$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\pi[\alpha_0a_0-2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)+\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)]$

$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]$

$+\pi[\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]]$.

$\ge\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi[\alpha_0a_0-2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)]$.

当 $a_k=\alpha_k$, $b_k=\beta_k$ 时取等号.

② 定理：$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

与 $f(x)$ 的距离 Δ_n（平方平均偏差）最小.

$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ Bessel.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$（通项 $\to0$）

Parseval. $\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2dx=0$，

即 $n\to\infty$，$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ 与三角函数系正交，则 $f(x)\equiv0$.

$f(x)$. $g(x)$ 系数相等，则 $f(x)\equiv g(x)$.

$\Rightarrow$ $f(x)$. $g(x)$ 系数有同样性.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)\pm g(x)]^2dx=\frac{(a_0\pm\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\pm\alpha_n)^2+(b_n\pm\beta_n)^2]$.

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

对 $[a,b]\in[-\pi,\pi]$，

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx$.

取 $g(x)=\begin{cases} 1, & a\le x\le b \\ 0, & -\pi\le x<a \text{ 或 } b<x<\pi. \end{cases}$

$g(x)$ 系数 $\alpha_n=\int_a^b\cos nx$, $b_n=\int_a^b\sin nx\,dx$.

例. $f(x)=|x|$.

展开 $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$.

则 $\frac{\pi^2}{2}+(\frac{4}{\pi})^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$.

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

③ 广义 Fourier 级数.

取标准正交系 $\varphi_1(x)\dots\varphi_n(x)$.

系数 $c_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$

构造广义 Fourier 级数 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$.

完备的标准正交系：$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\|f\|^2$.

$\|f-S_n\|=\|f-T_n\|$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\|f\|^2$ 级数收敛.

完备 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|\to0$

i) $f(x)$ 连续，$f(x)=0 \Leftrightarrow c_n=0$.

$0=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\int_a^b f^2(x)dx=0$.

ii) 删去 $\varphi_i(x)$ 则不完备.

反证：假设 $\varphi_2(x)\dots\varphi_n(x)$ 完备.

$\varphi_1(x)\sim\sum_{n=2}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$

$\|\varphi_1(x)\|=1=\sum_{n=2}^{\infty}c_n\varphi_1(x)=0$

例.（综合T1）. 证明：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的闭区间上一致收敛，但它不是任意在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积函数的 Fourier 级数.

当 $x\in[a,b]$ 时，$0<a<b<2\pi$（不包含 2π）.

$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$

$=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$

$\therefore \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\le M$，该级数一致收敛.（Dirichlet）

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2n}$ 发散，根据 Parseval，$f(x)$ 不平方可积.

例.（综合T2）f 是周期 2π 的可积且绝对可积函数，若 $f(x+\frac{2\pi}{n})=f(x)$，则 $b_n=0$.

只证 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有界时，

$\pi n\cdot b_n=n\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dnx$

$=\int_0^{2n\pi}f(\frac{t}{n})\sin t\,dt$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}f(\frac{t}{n})\sin t\,dt+\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}f(\frac{t}{n})\sin t\,dt\right]$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f(\frac{2k\pi+u}{n})-f(\frac{(2k+1)\pi+u}{n})\right]\sin u\,du=0$.

例. f 在 $[-a,a]$ 连续，在 $x=0$ 可导.

求证：$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)dx=\int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx$.

$\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)dx$

$=\int_0^a\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)dx+\int_{-a}^{0}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)dx$

$=\int_0^a\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)dx-\int_0^a\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(-x)dx$

$=\int_0^a(1-\cos\lambda x)\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx$

$=\int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx-\int_0^a\cos\lambda x\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx$.

令 $F(x)=\begin{cases} \frac{f(x)-f(-x)}{x}, & 0<x\le a \\ 2f'(0), & x=0 \end{cases}$ $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=f'(0)+f'(0)$.

$\therefore F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续.

* Reimann-Lebesgue 引理：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，函数 $g(x)$ 以 T 为周期，且 $g(x)$ 在 $[0,T]$ 上可积，则

$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx\int_a^b f(x)dx$.

广义：$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx=\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx\int_a^b f(x)dx$.

推论：① $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$（$\int_0^{2\pi}\cos\lambda x/\sin\lambda x\,dx=0$）.

$\therefore F(x)$ 在 $[0,a]$ Reimann 可积，

$\therefore \int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}\cos\lambda x\,dx\to0$

② $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin\lambda x|dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin\lambda x|dx\int_a^b f(x)dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$.

证明：先证 $\lambda=n$（正整数）的情形.

(1) 先设 $g(x)\ge0$.

取正整数 m，使 $[a,b]\subset[-mT,mT]$.

令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b] \\ 0, & x\in[-mT,mT]\setminus[a,b]. \end{cases}$

$\int_a^b f(x)g(nx)dx=\int_{-mT}^{mT}F(x)g(nx)dx$

$=\sum_{k=0}^{2mn-1}\int_{-mT+\frac{kT}{n}}^{-mT+\frac{(k+1)T}{n}}F(x)g(nx)dx=\sum_{k=0}^{2mn-1}\Delta_k$.

当 $0\le k\le2mn-1$ 时，记 $I_k=[-mT+\frac{kT}{n},-mT+\frac{(k+1)T}{n}]$.

记 $m_k=\inf F(x)$, $M_k=\sup F(x)$, $x\in I_k$.

易得 $m_k\int_{I_k}g(nx)dx\le\Delta_k\le M_k\int_{I_k}g(nx)dx$.

$\therefore \exists\mu_k\in[m_k,M_k]$ 使 $\Delta_k=\mu_k\int_{I_k}g(nx)dx$

$\int_{I_k}g(nx)dx=\frac{1}{n}\int_{-mnT+kT}^{-mnT+(k+1)T}g(t)dt=\frac{1}{n}\int_0^Tg(x)dx$

$\therefore \int_a^b f(x)g(nx)dx=\sum_{k=0}^{2mn-1}\mu_k\frac{T}{n}\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx$.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\int_{-mT}^{mT}F(x)dx\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx$

$=\int_a^b f(x)dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx$.

(2) $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$, $g_1(x)=\frac{|g(x)|+g(x)}{2}$,

$g_2(x)=\frac{|g(x)|-g(x)}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_1(nx)-f(x)g_2(nx)dx$

$=\int_a^b f(x)dx\frac{1}{T}\int_0^T g_1(x)-g_2(x)dx$.

$=\int_a^b f(x)dx\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

再证广义情形.

仅需说明 $g(x)\ge0$ 部分.

记 $\int_a^b f(x)dx=F$, $\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx=G$.

对 $\forall\varepsilon>0$，存在分割 T 使

$F-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$, $\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k<F+\varepsilon$.

$\therefore \sum_{k=1}^{n}m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(\lambda x)dx\le\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx$

$=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)g(\lambda x)dx\le\sum_{k=1}^{n}M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(\lambda x)dx$

引理 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(\lambda x)dx=\frac{b-a}{T}\int_0^Tg(x)dx$

又 $\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(\lambda x)dx=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx$.

$=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_kG>(F-\varepsilon)G$

$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(\lambda x)dx=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx<(F+\varepsilon)G$

$\therefore$ 存在 $\lambda_0>0$，使当 $\lambda>\lambda_0$ 时，

$\sum_{k=1}^{n}M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(\lambda x)dx<\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_kG+\varepsilon$

$\sum_{k=1}^{n}m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(\lambda x)dx>\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_kG-\varepsilon$.

$\therefore (F-\varepsilon)G-\varepsilon<\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx\le(F+\varepsilon)G+\varepsilon$.

$\therefore -(1+G)\varepsilon<\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx-FG<(1+G)\varepsilon$.

$\therefore \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx=FG$.

只需证 $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^b g(\lambda x)dx=bG$, $b>0$.

当 $\lambda>\frac{T}{b}$ 时，设 $\lambda b=nT+r$, $n\in N^*$, $0\le r<T$, $n=[\frac{\lambda b}{T}]$.

$\therefore \int_0^b g(\lambda x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda b}g(u)du=\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^{nT}g(u)du+\int_{nT}^{nT+r}g(u)du\right]$

$=\frac{1}{\lambda}\left[n\int_0^Tg(x)dx+\int_0^rg(x)dx\right]$

$=\frac{bnT}{\lambda b}\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx+\frac{1}{\lambda}\int_0^rg(x)dx$

$\to b\frac{1}{T}\int_0^Tg(x)dx+0$

其中 $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{nT}{\lambda b}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{[\frac{\lambda b}{T}]}{\frac{\lambda b}{T}}=1$，$(b>0)$.

$\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^rg(x)dx\right|\le\frac{M}{\lambda}$.

若 $b<0$，设 $-b=b_1>0$，

$\int_0^bg(\lambda x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda b}g(u)dx$

$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda b_1}g_1(t)dt\to-bG=b_1G$

例.（综合T7）. f 周期 2π 连续，令

$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$

易知 $f(x)$ 一致连续.

设 M 为上确界，对 $\forall x$ 都有 $|f(x)|\le M$.

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

$\therefore$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$|F(x)-F(x_0)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[f(x+t)-f(x_0+t)]dt\right|$

$\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)||f(x+t)-f(x_0+t)|dt$

$\le\frac{1}{\pi}M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}\cdot2\pi=\varepsilon$.

$\therefore F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，以 2π 为周期.

$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt\,dx$

$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt\,dx$

$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)du\,dt$ 周期长度的区间积分相同.

$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(u)du$.

$=(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx)^2=a_0^2$

$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\cos nx\,dx\,dt$

$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)[\cos n\xi\cos nt+\sin n\xi\sin nt]d\xi\,dt$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nt\,dx\dots=a_n^2+b_n^2$.

同理可计算 $B_n=0$.

$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt\sin nx\,dx$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt=F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$

特别取 $x=0$，$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$.

例.（综合T8）f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在该区间上可积且平方可积的导数 f'. 如果 $f(-\pi)=f(\pi)$, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$.

证明：$\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2dx\ge\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ 成立.

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$, $a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$.

$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right]=nb_n$.

$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right]=-na_n$.

$f(x)$, $f'(x)$ 连续且可积，

$\therefore \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2+b_n'^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)$

$\therefore \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2dx$

取等：$n=1$ / $n\ge2$ 时，$a_n=b_n=0$.

$\Downarrow$

整体条件 $\Rightarrow$ 若 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

则 $f(x)=a_1\cos x+b_1\sin x$.