# 整理

2022年4月27日 星期三　　上午11:42

数量场在曲线上的积分

> 曲线转为参数方程 $(x(t), y(t), z(t))$

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

> 平面曲线 $y=y(x)$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

> 平面极坐标 $r=r(\theta)$.

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

数量场在曲面上的积分

> 曲面转化为参数方程 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$E=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_u'$, $G=\vec{r}_v'\cdot\vec{r}_v'$, $F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'$. $|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|$

$\vec{r}_u'=(x_u', y_u', z_u')$, $\vec{r}_v'=(x_v', y_v', z_v')$

> 显式曲面 ⇒ 投影. $z=z(x,y)$.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy$$

向量场在曲线上的积分

> 物理定义. $F(P,Q,R)$. $\vec{r}=(x(t),y(t),z(t))$.

$$\int_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds = \int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

单位切向量.

$$= \int_L P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\,ds$$

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\vec{r}'(t)|}(x'(t),y'(t),z'(t))$$

> 参数方程 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

$$\int_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds = \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt.$$

> 格林公式 (注阀补线)

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

向量场在曲面上的积分.

> 物理定义.

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

单位法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

> 参数方程 $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \pm\iint_D \vec{v}\cdot(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v')\,du\,dv$$

$$=\pm\iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} du\,dv$$

> 显式曲面 ⇒ 投影. $z=f(x,y)$.

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \pm\iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} dx\,dy$$

> Gauss 定理

$$\oiint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Stokes 公式

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \end{vmatrix}$$

Green $$\oint_L P\,dx+Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Gauss $$\oiint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Stokes $$\oint_{\partial\Sigma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \end{vmatrix}$$