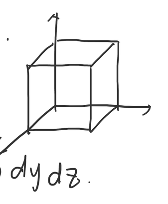
定理与微分形式

2022年2月5日 星期六　　下午5:35

一、Gauss定理

1. 设 $V=[0,a]\times[0,b]+[0,c]$. $S=\partial V$.



$\oint\!\!\oint_S \vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_{S_1+S_2}+\iint_{S_3+S_4}+\iint_{S_5+S_6}$

$\iint_{S_1}\vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_{S_1}\vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}}P(a,y,z)\,dy\,dz$.

$\iint_{S_2}\vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_{S_2}\vec v\cdot(-\vec i)\,dS=\iint_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}}-P(0,y,z)\,dy\,dz$.

$\iint_{S_1+S_2}\vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}}(P(a,y,z)-P(0,y,z))\,dy\,dz$

$=\iint_{S_1}\left(\int_0^a\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}dx\right)dy\,dz$

$=\iiint_V\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}dx\,dy\,dz$

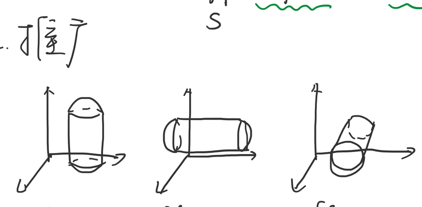
$\therefore\oint\!\!\oint_{S=\partial V}\vec v\cdot\vec n\,dS=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$

$=\iiint_V\nabla\cdot\vec v\,dx\,dy\,dz=\iiint\operatorname{div}\vec v\,dx\,dy\,dz$.

$d\vec S$ 在各平面投影

$=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy$

2. 推广



$\iint_S R\,dx\,dy$　$\iint_S Q\,dx\,dz$　$\iint_S P\,dy\,dz$　适用Gauss.

V分成有限个不重叠的圆柱.

例. $\iint_S x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy$, $S: x^2+y^2+z^2=c^2, z\ge 0$.

法1. 对 $\iint_S y^2dz\,dx$,

S_1(右半球) $y=\sqrt{c^2-x^2-z^2}$

S_2(左半球) $y=-\sqrt{c^2-x^2-z^2}$.

$\iint_{S_1}y^2dz\,dx=\iint_{x^2+z^2\le c^2-y^2, z\ge0}(c^2-x^2-z^2)\,dz\,dx$

$\iint_{S_2}y^2dz\,dx=-\iint_{x^2+z^2\le c^2-y^2, z\ge0}(c^2-x^2-z^2)\,dz\,dx$.

即 $\iint_S y^2dz\,dx=0$, 同理 $\iint_S x^2dy\,dz=0$

$\iint_S z^2dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le c^2}(c^2-x^2-y^2)\,dx\,dy$

$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^c(c^2-r^2)r\,dr=$

法2: $\iint_S=\iint_{S+S_0}-\iint_{S_0}=\oint\!\!\oint_{S+S_0}-\iint_{S_0}$

$\iint_{x^2+y^2\le c^2, z=0}z^2dx\,dy=0$.

一次, 对称

$\oint\!\!\oint_{S+S_0}=2\iiint_{V(x^2+y^2+z^2\le c^2), z\ge0}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=2\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$

$=2\int_0^c dz\iint_{x^2+y^2\le c^2-z^2}x+y\,dx\,dy$

二、Stokes定理.

1. 回顾

Green定理:

设 $\vec v=P\vec i+Q\vec j$. $D\subset\mathbb R^2$, ∂D 光滑.

$\oint_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

线积分　面积分

N-L: $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$

点积分　线积分

2. Stokes定理.

$\vec v=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$. $S\subset\mathbb R^3$.

记 $\partial S=L$ 是 S 的边, 且 L 为封闭曲线.

则 $\oint_L\vec v\cdot\vec\tau\,ds=\oint_L(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$

$=\iint_S(\nabla\times\vec v)\cdot\vec n\,dS=\iint_S\operatorname{rot}\vec v\cdot\vec n\,dS$

$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

证明: $S: \vec r=\vec r(u,v)=x(u,v)\vec i+y(u,v)\vec j+z(u,v)\vec k$.

D: $u=u(t)$, $v=v(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$. $(u,v)\in D$.

$L=\partial S$: $\vec r=\vec r(t)$, t作为参量.

$\oint_L P\,dx=\oint_L P x'\,dt$

$=\int_\alpha^\beta P(x(u(t),v(t)),y,z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}u'+\frac{\partial x}{\partial v}v'\right)dt$

$=\int_\alpha^\beta P\frac{\partial x}{\partial u}du+P\frac{\partial x}{\partial v}dv$

$=\iint_D\left(\frac{\partial(P\frac{\partial x}{\partial v})}{\partial u}-\frac{\partial(P\frac{\partial x}{\partial u})}{\partial v}\right)du\,dv$

$=\iint_D(P'_u x'_v+P x''_{vu}-P'_v x'_u-P x''_{uv})\,du\,dv$.

$=\iint_D(P'_x x'_u+P'_y y'_u+P'_z z'_u)x'_v$

$-(P'_x x'_v+P'_y y'_v+P'_z z'_v)x'_u$

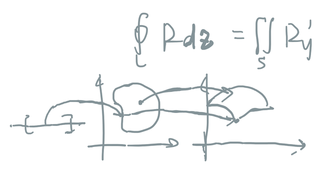
$=\iint_D\left(-P'_y\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}+P'_z\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)du\,dv$

$=\iint_S P'_z\,dz\,dx-P'_y\,dx\,dy$

(向量场 $\vec v=0\vec i+P'_z\vec j-P'_y\vec k$)

同理, $\oint_L Q\,dy=\iint_S Q'_x\,dx\,dy-Q'_z\,dy\,dz$.

$\oint_L R\,dz=\iint_S R'_y\,dy\,dz-R'_x\,dz\,dx$.



三、其他形式的曲线积分.

1. $\int\varphi\,ds\longrightarrow\int\varphi\,d\vec r=\int\varphi\frac{\vec r'}{|\vec r'|}ds\Rightarrow$ 向量

$\int\vec v\cdot\vec\tau\,ds=\int\vec v\,d\vec r\longrightarrow\int d\vec r\times\vec v=\int\vec\tau\times\vec v\,ds\Rightarrow$ 向量

$\iint\varphi\,dS\rightarrow\iint\varphi\,d\vec S=\iint\varphi\vec n\,dS\Rightarrow$ 向量

$\iint\vec v\cdot\vec n\,dS\longrightarrow\iint\vec n\times\vec v\,dS$

2. 定理

$\oint_{\partial S}\varphi\vec\tau\,ds=\oint_{\partial S}\varphi\,d\vec r=\iint_S\vec n\times\nabla\varphi\,dS$

$\oint_{\partial S}\vec\tau\times\vec v\,ds=\iint_S(\vec n\times\nabla)\times\vec v\,dS$

$\oint\!\!\oint_{\partial V}\varphi\vec n\,dS=\iiint_V(\nabla\varphi)\,dV$

$\oint\!\!\oint_{\partial V}(\vec n\times\vec v)\,dS=\iiint_V(\nabla\times\vec v)\,dV$

证明: ① 要证两个向量相等, 点乘任意常数相等.

左边 $=\vec a\cdot\oint_{\partial S}\varphi\vec\tau\,ds=\oint_{\partial S}\vec a\cdot\varphi\vec\tau\,ds=\oint_{\partial S}\varphi\vec a\cdot\vec\tau\,ds$

$=\iint_S(\nabla\times(\varphi\vec a))\cdot\vec n\,dS=\iint_S(\nabla\varphi\times\vec a)\cdot\vec n\,dS$

$=\iint_S(\vec n\times\nabla\varphi)\cdot\vec a\,dS=\vec a\cdot\iint_S(\vec n\times\nabla\varphi)\,dS$

3. $\oint\!\!\oint_{\partial V}\varphi\vec n\,dS=\iiint_V(\nabla\varphi)\,dV=\nabla\varphi(\xi,\eta,\zeta)|V|$

$\nabla\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{|V|}\oint\!\!\oint_{\partial V}\varphi\vec n\,dS$.

$\therefore\nabla\varphi(x,y,z)=\lim_{V\to0}\frac{1}{|V|}\oint\!\!\oint_{\partial V}\varphi\vec n\,dS$. 梯度.

$\nabla\times\vec v=\lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\iiint\nabla\times\vec v\,dV=\lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\oint\!\!\oint(\vec n\times\vec v)\,dS$ 旋度

由 $\oint\!\!\oint_{\partial V}\vec v\cdot\vec n\,dS=\iiint_V\nabla\cdot\vec v\,dV$,

$\nabla\cdot\vec v=\lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\iiint_V\nabla\cdot\vec v\,dV=\lim_{V\to P}\oint\!\!\oint\vec v\cdot\vec n\,dS$ 散度

四、保守场

1. 定义: 设 $V\subset\mathbb R^3$ 连通, $\vec v$ 光滑向量场.

若对 V 内任意曲线 L_{AB}, $\int_{L_{AB}}\vec v\cdot\vec\tau\,ds=\int_{L_{AB}}\vec v\cdot d\vec r$

与路径无关, 则称 $\vec v$ 为保守场.

{ 空间单连通: 任意闭路 L 可收缩为一点

曲面单连通: 任意闭路 L 在 V 内可张成在 V 中的曲面.

2. $V\subset\mathbb R^3$ 曲面连通, $\vec v=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$ 光滑, 则命题: $\vec v$ 是保守场

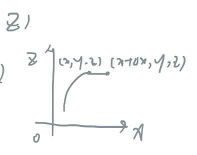
$\Leftrightarrow$ $\exists$ 数量场 φ 使 $\vec v=\nabla\varphi$

φ 称为 $\vec v$ 的势函数, $\vec v\,d\vec r=d\varphi$.

$\Leftrightarrow$ $\vec v$ 在 V 中满足 $\nabla\times\vec v=0$. (用于验证)

证明: (①⇒②) $\vec v$ 是保守场, 固定 (x_0,y_0,z_0),

则 $\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\vec v\,d\vec r=\varphi(x,y,z)$



$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x}$

$=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}\vec v\,d\vec r$

$=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

$=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}P\,dx\xrightarrow{\text{取极限}}P(x,y,z)$.

$\varphi'_x=P$, $\varphi'_y=Q$, $\varphi'_z=R$, $\vec v=\nabla\varphi$.

(②⇒③) $\nabla\times\vec v=\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

(③⇒①) 若 $\nabla\times\vec v=0$, $\oint_L\vec v\,d\vec r=\oint_L\vec v\cdot\vec\tau\,ds=\iint_S\nabla\times\vec v\cdot\vec n\,dS=0$.

环量为0, 与路径无关.

3. 定理: 设 $\vec v$ 是保守场, φ 是 $\vec v$ 的势函数,

则 $\int_A^B\vec v\,d\vec r=\varphi(B)-\varphi(A)$.

例. 设 $\vec F$ 是保守场. 求 $\vec F$ 对质点做的功.

势函数 $-u$, $\vec F=-\nabla u$.

$\int_A^B\vec F\,d\vec r=-u\Big|_A^B=u(A)-u(B)$

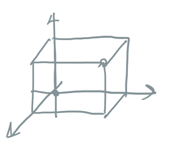
例. 设 $\vec v=(x^2-yz)\vec i+(y^2-xz)\vec j+(z^2-xy)\vec k$.

验证 $\vec v$ 为保守场, 并寻找势函数.

$\nabla\vec v=0\Leftrightarrow\begin{cases}R'_y-Q'_z=0\\P'_z-R'_x=0\\Q'_x-P'_y=0\end{cases}$

取固定点 $(0,0,0)$

$\varphi(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\vec v\,d\vec r$



$=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

$=\int_0^x P(x,0,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y,0)+\int_0^z R(x,y,z)\,dz$

$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-xy)\,dz$

$=\frac13(x^3+y^3+z^3)-xyz$

例. 求 $\vec v=q\frac{\vec r}{r^3}$ 的势函数

$\vec v$ 在 $(0,0,0)$ 没有定义.

$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\vec v\cdot d\vec r=\int_{M_0}^{M}\vec v\,d\vec r$

$=\int_{M_0}^{M}q\frac{\vec r}{r^3}d\vec r$

$\vec r\cdot d\vec r=\frac12 d(\vec r\cdot\vec r)=\frac12 dr^2=r\,dr$.

$=q\int_{M_0}^{M}\frac{dr}{r^2}=-q\frac1r\Big|_{M_0}^{M}=q\left(\frac{1}{r_0}-\frac1r\right)$.

例. 计算 $\int_{(1,0)}^{(3,1)}(e^y+1)\,dx+(xe^y-2y)\,dy$.

$\vec v=(e^y+1)\vec i+(xe^y-2y)\vec j$ 保守场.

$\vec v=\nabla\varphi=\varphi'_x\vec i+\varphi'_y\vec j$

$\vec v\cdot d\vec r=(e^y+1)\,dx+(xe^y-2y)\,dy$.

$=\varphi'_x dx+\varphi'_y dy=d\varphi$.

$\varphi(x,y)=xe^y+x-y^2$,

原式 $=\varphi(x,y)\Big|_{(1,0)}^{(3,1)}=3e$.

五. 无源场.

1. 定义: 若 $\vec v$ 满足 $\nabla\cdot\vec v=0$, 则 $\vec v$ 是无源场.

($\vec v=\nabla\varphi$ 梯度场/有势场.

$\nabla\times\vec v=0$ 无旋场. $\nabla\cdot\vec v=0$ 无源场).

2. 定理: 若存在一个向量场 $\vec\alpha$ 使 $\vec v=\nabla\times\vec\alpha$, 则 $\vec v$ 是无源场, 称 $\vec\alpha$ 为 $\vec v$ 的向量势.

3. 已知 $\vec v=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$, $\vec v$ 是无源场, 求向量势 $\vec\alpha$.

设 $\vec\alpha=A\vec i+B\vec j+C\vec k$, 求 $\vec\alpha$ 使 $\vec v=\nabla\times\vec\alpha$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}=P\\\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}=Q\\\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}=R\end{cases}$　不妨取 $C=0$ (简化方程).

$-\frac{\partial B}{\partial z}=P$, $\frac{\partial A}{\partial z}=Q$, $\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}=R$.

$A=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,dz$, $B=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,dz+f(x,y)$

代入③, $-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial P}{\partial x}dz-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial Q}{\partial y}dz+\frac{\partial f}{\partial x}=R$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial x}=R+\int_{z_0}^{z}\frac{\partial P}{\partial x}dz+\int_{z_0}^{z}\frac{\partial Q}{\partial y}dz$

由 $\nabla\vec v=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$,

$\frac{\partial f}{\partial x}=R-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}dz=R(x,y,z)-R(x,y,z)+R(x,y,z_0)$

$\therefore f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=R(x,y,z_0)$,

$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)\,dx$.

$\therefore A=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,dz$, $B=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,dz+\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)\,dx$

$\therefore\vec\alpha=A\vec i+B\vec j+0\vec k$. 使 $\vec v=\nabla\times\vec\alpha$.

4. 两个向量势 $\vec\alpha$, $\vec\beta$, $\vec v=\nabla\times\vec\alpha=\nabla\times\vec\beta$.

$\nabla(\vec\alpha-\vec\beta)=0$, $\vec\alpha=\vec\beta+\nabla\varphi$.

向量场为保守场 $\Leftrightarrow$ 无旋场.

数量场的梯度场的积分与路径无关,

即梯度场为保守场, rot grad f = 0.

$(\nabla\times\nabla f=0)$.

保守场一定是一个数量场(势函数)的梯度.

向量场为无源场 $\Leftrightarrow$ 散度为零.

向量场的旋度场是无源场. div rot a = 0.

$(\nabla\cdot\nabla\times\vec\alpha)=0$.

六、微分形式的积分.

1. $\forall\vec v=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$

$\int_{L_{AB}}\vec v\cdot d\vec r=\int_{L_{AB}}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int w^1_{\vec v}$.

$\iint_S\vec n\,d\vec S=\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy=\iint_S w^2_{\vec v}$.

$\oint_{\partial S}\vec v\cdot d\vec r=\iint_S\nabla\times\vec v\,d\vec S$, $\oint_{\partial S}w^1_{\vec v}=\iint_S w^2_{\nabla\times\vec v}$

(Gauss - Stokes 公式)

$\int_{\partial V}w^2_{\vec v}=\int_V dw^2_{\vec v}\Rightarrow\int_{\partial\Omega}w=\int_\Omega dw$.

其中 Ω 是 $\mathbb R^n$ 中 r 维的区域, $\partial\Omega$ 为 r-1 维,

w是 r-1 次微分形式, dw 是 r 次.

2. 保守场 $\vec v$: $\nabla\vec v=0$, ~~即存在 $\vec v=\nabla\varphi$~~, $dw^1_{\vec v}=0$.

若 $\exists w_\varphi$ 使 $w^1_{\vec v}=dw_\varphi$.

无源场 $\vec v$, $\nabla\cdot\vec v=0$. $dw^2_{\vec v}=0$.

若 $\exists w_\varphi$ 使 $w^2_{\vec v}=dw_{\vec v}$.

六、微分形式的积分.

1. 对 $\forall\vec v=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$.

$\int_{L_{AB}}\vec v\cdot\vec r\,ds=\int_{L_{AB}}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{L_{AB}}w^1_{\vec v}$.

$\iint_S\vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_S P\,dx\,dz+Q\,dy\,dz+R\,dx\,dy=\int w^2_{\vec v}$.