第二型

2022年4月20日 星期三 上午9:47

一、向量场在曲线上的积分

1. 定义

$\vec{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

$W=\sum \vec{v}(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$

设有曲线 L，$\vec r=\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$

分割 $M_{i-1}M_i$，任取点 (ξ_i,η_i,ζ_i)

$\sum \vec v(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\vec r_i$

$=\sum (P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q\Delta y_i+R\Delta z_i)$

第二型曲线积分 记为 $\int_L \vec v\cdot d\vec r$

2. 计算

$\int_{L_{AB}}\vec v\cdot d\vec r=\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt$

$\Delta x_i=x'(\tau_i)\Delta t_i$，$\Delta y_i=y'(\tau_i)\Delta t_i$，$\Delta z_i=z'(\tau_i)\Delta t_i$

$M_i(x_i,y_i,z_i)=(x(t_i),y(t_i),z(t_i))$

$\sum[P(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i))x'(\tau_i)+\cdots]\Delta t_i\to\int$

一致连续

$\int_L\vec v\cdot d\vec r=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$

$=\int_\alpha^\beta \vec v(\vec r(t))\cdot\vec r'(t)\,dt$，$(=\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz)$

设 S 是曲线 L_{AB} 的弧长参数

$\frac{d\vec r}{ds}=\vec\tau(s)$，$\int_{L_{AB}}\vec v\cdot d\vec r=\int_{L_{AB}}\vec v\cdot\vec\tau\,ds$

$\vec\tau=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$d\vec r=\vec\tau ds=(\cos\alpha ds,\cos\beta ds,\cos\gamma ds)$

3. 性质

线性性，可加性，方向性

例. 计算 $\int_L xy\,dx+x^2dy$，L：三段围成

L_1：$0\le x\le 1$，$y=0$，$dy=0$

$\int_{L_1}xy\,dx+x^2dy=0$

L_2：$x=1$，$0\le y\le 2$，$dx=0$

$\int_{L_2}xy\,dx+x^2dy=\int_0^2 1\,dy=2$

L_3：$y=2x$

$\int_{L_3}xy\,dx+x^2dy=-\int_0^1 2x^2+2x^2\,dx=-\frac43$

例. 力场 $\vec F=y\vec i-x\vec j+z\vec k$，

沿螺旋线 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$，$z=kt$

$\vec r'(t)=(-R\sin t,R\cos t,k)$

$\int_L\vec F\cdot d\vec r=\int_0^{2\pi}-R^2\sin^2t-R^2\cos^2t+k^2t\,dt$

例. $\vec F=-k\frac{m}{r^3}\vec r$.

$W=\int_L\vec F\cdot d\vec r=-km\int_L\frac{1}{r^3}\vec r\cdot d\vec r$

$\vec r\cdot d\vec r=\frac12 d(x^2+y^2+z^2)=\frac12 d r^2=r\,dr$

$W=-km\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr=km(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A})$

例. 向量场 $\vec v=\frac{-y\vec i+x\vec j}{x^2+y^2}$，沿 $L:x^2+y^2=R^2$ 的环量

$L:\begin{cases}x(t)=R\cos t\\ y(t)=R\sin t\end{cases}$

$\int_L\vec v\cdot d\vec r=\int_0^{2\pi}\frac{R\sin t\cdot R\sin t+R\cos t\cdot R\cos t}{R^2}dt=2\pi$

4. Green 定理

① 设 D 是有限条逐段光滑的简单闭曲线 $(L=\partial D)$，P,Q 在 D 上有连续偏导，则 $\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

I 类区域：$D_1=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

(i) 先证 $\oint_L Pdx=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$

$\oint Pdx=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}$

L_1, L_3：$dx=0$

$\therefore\oint Pdx=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx-\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx$

且 $-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy$

$=-\int_a^b[P(x,\varphi_2(x))-P(x,\varphi_1(x))]dx$

(ii) 再证 I 类区域的推广（分割区域）

$\oint Qdy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$

(iii) 同理 $\oint_{\partial D}Qdy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$，$\oint_{\partial D}Pdx=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$

② 推论：设 D 是满足条件的闭域，则

$\sigma(D)=\frac12\oint_{\partial D}-ydx+xdy$

$=\frac12\iint_D(1-(-1))dxdy=\sigma(D)$

$(P=-y,\ Q=x)$

③ 挖补法对多连通区域成立

内部区域边界反向

例. $\vec v=\frac{-y\vec i+x\vec j}{x^2+y^2}$ 在不过原点的曲线上环量

$\vec v(P,Q)$，$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

$(x,y)\ne(0,0)$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\therefore\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$

若包含原点，$\vec v$ 在 $(0,0)$ 无定义

不满足定理条件

而以原点为圆心，r 为半径的圆周 L_r，则 L 与圆周之间区域

$\oint_L\vec v\cdot d\vec r-\oint_{L_r}\vec v\cdot d\vec r=0$

$\oint_L\vec v\cdot d\vec r=\oint_{L_r}\vec v\cdot d\vec r=2\pi$

④ D 是平面上单连通区域，$\vec v$ 在 D 上连续可微，$\vec v$ 沿闭曲线环量为零

$\Leftrightarrow\vec v=\operatorname{grad}\varphi(x,y)$

$\Leftrightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

证 $\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$

取 $M_0(x_0,y_0)\in D$，$M(x,y)\in D$，$B(x,y_0)\in D$

$\lim\frac{\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y)$

同理 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)$

φ 有二阶连续偏导

D 单连通 → 环量为零

⑤ 积分与路径无关

$\int_A^B\vec v\cdot d\vec r=\varphi(B)-\varphi(A)$，$\vec v=\nabla\varphi$

称为势函数

例. 多边形 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$

用 Green 公式计算面积

$(x_{n+1},y_{n+1})=(x_1,y_1)$

$\sigma(D)=\frac12\oint x\,dy-y\,dx=\frac12\sum_{k=1}^n\frac{(x_k y_{k+1}-x_{k+1}y_k)}{2}\cdots$

⑥ 进一步讨论

设 $u(x,y),v(x,y)\in C^2(D)$，D 是单连通区域，L 是 D 的外法向量

证明 (i) $\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\iint_D(\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v)dxdy$

(ii) $\oint_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds=\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)dxdy$

证明：(i) 设 L 的切向量 $\vec\tau=(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds})=(\cos\theta,\sin\theta)$

则外法向量 $\vec n=(\sin\theta,-\cos\theta)$

$\frac{\partial v}{\partial n}=\nabla v\cdot\vec n$（方向导数定义）

$\therefore\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\oint_L u\nabla v\cdot\vec n\,ds$

$=\oint_L u(v'_x,v'_y)\cdot(\sin\theta ds,-\cos\theta ds)$

$=\oint_L u v'_x dy-uv'_y dx$

$=\iint_D\frac{\partial(uv'_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-uv'_y)}{\partial y}dxdy$

$=\iint_D u'_xv'_x+uv''_{xx}+u'_yv'_y+uv''_{yy}\,dxdy$

$=\iint_D(u'_x,u'_y)\cdot(v'_x,v'_y)+u(v''_{xx}+v''_{yy})dxdy$

$=\iint_D\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v\,dxdy$

(ii) $\oint(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds$

$=\iint_D\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v-\nabla v\cdot\nabla u-v\Delta u\,dxdy$

$=\iint_D u\Delta v-v\Delta u\,dxdy$

二、向量场在曲面上的积分

1. 曲面

① 单\双侧之

在曲面上作过 M 的闭曲线，法向量 $\vec n(M)$ 连续变化一圈后，$\vec n(M)$ 双侧，$-\vec n(M)$ 单侧。

有一个点为双侧的，则该面上所有点都是双侧的。

反证法：M_0 双侧。

假设 M_1 单侧。

$\vec n(M_0)$，$\vec n(M_1)$，$-\vec n(M_1)$，$-\vec n(M_0)$ 矛盾。

② 双侧曲面定向。

$\vec r=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

$\vec n=\frac{\vec r'_u\times\vec r'_v}{|\vec r'_u\times\vec r'_v|}$

如果 $\vec r_u\times\vec r_v$ 与 $\vec n$ 定向相同，则 (u,v) 为正向参数（否则 (v,u) 为正向）

③ 显式曲面。

$S:z=f(x,y)$，$S\ (x,y,f(x,y))$.

$\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&0&f'_x\\0&1&f'_y\end{vmatrix}=(-f'_x,-f'_y,1)$

$\vec n=\frac{(-f'_x,-f'_y,1)}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}$ 曲面上/下侧.

④ 封闭曲面 内侧&外侧. 外侧为正.

$x^2+y^2+z^2=R^2$，$\vec n=\frac{(x,y,z)}{R}=\frac{\vec r}{R}$.

2. 计算

① $d\vec S=\vec n\,dS$

$\vec v\cdot d\vec S=\vec v\cdot\vec n\,dS$

第二型 ⇒ 第一型.

例. $\vec v=\frac{-y\vec i+x\vec j}{x^2+y^2}$

$S:\{(x,y,z)\mid 1\le x\le 3,\ 0\le z\le 2\}$.

易知 $\vec n=\vec j$. S 上 $\vec v=\frac1x\vec j$.

$\therefore\iint_S\vec v\cdot\vec n\,dS=\iint_S\frac1x\vec j\cdot\vec j\,dz\,dx=\int_0^2\int_1^3\frac1x\,dx\,dz=2\ln3$

② $\vec r=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

$\vec n=\frac{\vec r'_u\times\vec r'_v}{|\vec r'_u\times\vec r'_v|}$

$d\vec S=\vec n\,dS=\frac{\vec r'_u\times\vec r'_v}{|\vec r'_u\times\vec r'_v|}|\vec r'_u\times\vec r'_v|\,dudv$

$=(\vec r'_u\times\vec r'_v)\,dudv$

$=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}=(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\cdots)$

$\vec v=(P,Q,R)$，

则 $\iint_S\vec v\cdot d\vec S=\iint_D\vec v\cdot(\vec r'_u\times\vec r'_v)\,dudv$

$=\iint_D P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv$.

③ 记 $dy\wedge dz=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv$

则 $d\vec S=dy\wedge dz\,\vec i+dz\wedge dx\,\vec j+dx\wedge dy\,\vec k$

$=(dy\wedge dz,\ dz\wedge dx,\ dx\wedge dy)$ 投影.

$=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

$dy\wedge dz$ 性质类似外积.

则 $\iint_S\vec v\cdot d\vec S=\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$

$=\iint_S P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\,dS$.

④ 对显式曲面 $S:z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$.

$\iint_S\vec v\cdot d\vec S=\iint_D\begin{vmatrix}P&Q&R\\1&0&f'_x\\0&1&f'_y\end{vmatrix}dxdy$

$=\iint_D(-Pf'_x-Qf'_y+R)\,dxdy$.

当 $P=Q=0$ 时，$\iint_S R\,dx\,dy=\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dxdy$.

例. $\vec v(x,y,z)=P(x,y,z)\vec i+Q\vec j+R\vec k$

通过 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

球坐标. $x=a\sin\theta\cos\varphi$. $y=a\sin\theta\sin\varphi$. $z=a\cos\theta$

$\vec r'_\theta\times\vec r'_\varphi=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\a\cos\theta\cos\varphi&a\cos\theta\sin\varphi&-a\sin\theta\\-a\sin\theta\sin\varphi&a\sin\theta\cos\varphi&0\end{vmatrix}$

$=(a^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ a^2\sin\theta\cos\theta)$

$\iint_S\vec v\cdot d\vec S=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}a^2\sin\theta(P\sin\theta\cos\varphi+Q\sin\theta\sin\varphi+R\cos\theta)\,d\theta\,d\varphi$.

对 $\vec E=\frac{q}{r^3}\vec r$. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\iint_S\vec E\cdot d\vec S=q\iint_S\frac{\vec r}{r^3}\cdot\frac{\vec r}{r}\,dS$

$=q\iint_S\frac{1}{R^2}dS=\frac{q}{R^2}4\pi R^2=4\pi q$.

例. $\vec v(x,y,z)=P(x,y,z)\vec i+Q(x,y,z)\vec j+R(x,y,z)\vec k$ 通过 $x^2+y^2=a^2$，$-h\le z\le h$.

$\vec n=\frac{(x,y,0)}{a}=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$z=z$.

$\vec r=(x,y,z)=(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$

$\iint_S\vec v\cdot d\vec S=\iint_D(P,Q,R)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0)\,a\,d\theta\,dz$

$=a\int_0^{2\pi}\int_{-h}^h P\cos\theta+Q\sin\theta\,d\theta\,dz$

对 $\vec E=\frac{q}{r^3}\vec r$.

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{a^2+z^2}$.

$\iint_S\vec E\cdot d\vec S=q\int_0^{2\pi}\int_{-h}^h\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(a^2+z^2)^{\frac32}}a^2\,d\theta\,dz$

$=\frac{2a^2q\cdot a\cdot 2\pi}{a^3}\int_0^{\arctan\frac ha}\cos^3\varphi\sec^2\varphi\,d\varphi=4\pi q\sin\varphi\Big|_0^{\arctan\frac ha}$

$=\frac{4\pi q\cdot h}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

例. $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$.

S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

法1. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$.

$I=\iint_D x^2\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y^2\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+a^2-x^2-y^2\,dxdy$

$=\iint_D a^2-(x^2+y^2)\,dxdy$

$=\int_0^a\int_0^{2\pi}(a^2-r^2)\,r\,dr\,d\theta$

$=\pi\int_0^a(a^2-r^2)\,dr^2=\pi(a^4-\frac12a^4)$

法2. $I=a^2\int_0^{\frac\pi2}\int_0^{2\pi}(a\sin\theta\cos\varphi)^2\sin^2\theta\cos\varphi+(a\sin\theta\sin\varphi)^2\sin^2\theta\sin\varphi$

$+(a\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi$

$=a^2(\int_0^{\frac\pi2}\int_0^{2\pi}a^2\sin^4\theta\cos^3\varphi\,d\theta d\varphi+\int_0^{\frac\pi2}\int_0^{2\pi}a^2\sin^4\theta\sin^3\varphi\,d\theta d\varphi$

$+\int_0^{\frac\pi2}\int_0^{2\pi}a^2\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta d\varphi)$

$=a^4\times2\pi\times\frac14\cos^4\theta\Big|_{\frac\pi2}^{0}=\frac\pi2a^4$.

例. $\iint_S y(x-z)\,dydz+x^2dzdx+(y^2+zx)\,dxdy$.

通过长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$

S_1. $\iint_{S_1}y(x-z)\,dydz+\iint_{S_2}y(x-z)\,dydz$

$=\int_0^b\int_0^c y(a-z)\,dy\,dz+\int_0^b\int_0^c y(0-z)\,dy\,dz=\frac12ab^2c$.

…

S_2. Gauss 定理（闭曲面）

原式 $=\iiint_V(y+0+x)\,dx\,dy\,dz$

例. $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx$.

S 为椭球面上半部 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

S_1. S 参数. $x=a\sin\theta\cos\varphi$，$y=b\sin\theta\sin\varphi$. $z=c\cos\theta$.

$\iint_S x^3dydz=\int_0^{\frac\pi2}\int_0^{2\pi}(a\sin\theta\cos\varphi)^3bc\sin\theta\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi$.

$=a^3bc\int_0^{\frac\pi2}\sin^5\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi$

S_2. Gauss 添底面.

原式 $=(\iint_{\text{半球}}-\iint_{\text{平面}})\,x^3dydz+y^3dzdx$

$=\iiint_V(3x^2+3y^2)\,dxdydz-\iint x^3dy\,\overset{z=0}{dz}+y^3\,\overset{0}{dz}\,dx$

对 $\iiint_{V\to\text{全体}}x^2dxdydz=a^3bc\iiint_{V'}u^2\,dudvdw$.

$=a^3bc\,\frac13\iiint_{V'}u^2+v^2+w^2\,dudvdw$

$=\frac{a^3bc}{3}\int_0^1\int_0^{\frac\pi2}\int_0^{2\pi}r^4\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$. 代回.

例. $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 有连续一阶偏导，对任一以 (x_0,y_0) 为圆心，$\forall r>0$ 的半圆 L $\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$

恒有 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

证明：$P(x,y)\equiv0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv0$.

$\int_0^\pi[P(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\,r(-\sin\theta)+Q(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)$

$r\cos\theta]\,d\theta=0$.

$\int_0^\pi[P(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)(-\sin\theta)+Q(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)]\cos\theta\,d\theta=0$

$r\to0$，$\int_0^\pi[P(x_0,y_0)(-\sin\theta),\ Q(x_0,y_0)\cos\theta]\,d\theta=0$.

$\therefore-2P(x_0,y_0)=0$. $P(x,y)\equiv0$.

$\therefore\int_0^\pi Q(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\cos\theta=0$.

对 r 求导，$\int_0^\pi\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\cos\theta\cdot\cos\theta$

$+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\sin\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=0$.

$r\to0$，$\int_0^\pi\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)\cos^2\theta+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\theta\cos\theta\,d\theta=0$.

$\frac\pi2\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)+0=0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=0$.

是否充要：当 $Q=f(y)$，$P=0$ 时，

是否 $\int_L Q(x,y)\,dy=0$.

$\int_L Q(x,y)\,dy=\int_0^\pi f(y_0+r\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^0 f(y_0+rt)\,dt$.

Green 公式：$0=\int_L Q\,dy=\int_{L+L_1}-\int_{L_1}Q\,dy$

$=\iint_{D_r}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\int_{L_1}Q\,dy$

$=\frac12\pi r^2\frac{\partial Q}{\partial x}(\xi_r,\eta_r)-\int_{x_0-r}^{x_0+r}Q\,dy$

$dy=0$，$\therefore\frac12\pi r^2\frac{\partial Q}{\partial x}(\xi_r,\eta_r)=0$.

$\therefore\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv0$.

3. Gauss 定理.

① 设 $R(x,y,z)$ 有一阶连续偏导，V 是 Z 型闭域，则 $\iint_S R\,dx\,dy=\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz$.

$\iint_S R\,dxdy=\iint_{S_2}R\,dxdy+\iint_{S_1}R\,dxdy$

$=\iint_D R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy-R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy$

$=\iint_D\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\,dxdy$.

② $\oiint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$

$=\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\,dxdydz$.

$\oiint_S\vec v\cdot d\vec S=\iiint_V\nabla\cdot\vec v\,dV=\iiint_V\operatorname{div}\vec v\,dV$.

4. Stokes 公式.

$\oint_L P\,dx=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$.

$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\\dydz&dzdx&dxdy\end{vmatrix}$

$\oint_L P\,dx=\int_\alpha^\beta P(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))$

$(x'_uu'_t+x'_vv'_t)\,dt$

$=\int_\alpha^\beta Px'_uu'_t\,dt+\int_\alpha^\beta Px'_vv'_t\,dt$

$=\int_{\partial D}Px'_u\,du+Px'_v\,dv$

$=\iint_D[\frac{\partial Px'_v}{\partial u}-\frac{\partial Px'_u}{\partial v}]\,dudv$

$\frac{\partial Px'_u}{\partial v}=(P'_xx'_v+P'_yy'_v+P'_zz'_v)x'_u+Px''_{uv}$

$=\iint_D[P'_z\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-P'_y\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]\,dudv$

$=\iint_S P'_z\,dzdx-P'_y\,dxdy$.

例. $\vec F=y^2\vec i+z^2\vec j+x^2\vec k$，

沿 S 的正向边界一周做的功.

S_1. $\int_{\partial S}\vec F\cdot d\vec r=\int_{\partial S}y^2dx+z^2dy+x^2dz$，$\vec r(1,1,1)$.

$=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y^2&z^2&x^2\\dydz&dzdx&dxdy\end{vmatrix}$ Stokes.

$=\iint_S(-2z,-2x,-2y)\cdot\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)\,dS$

$=-\frac{2}{\sqrt3}\iint_S 1\,dS=-\frac{2}{\sqrt3}\times\frac{\sqrt3}{2}=-1$.

S_2. L_1：$(x,y,z)=(1-t,t,0)$

L_2：$(x,y,z)=(0,1-t,t)$

L_3：$(x,y,z)=(t,0,1-t)$

原式 $=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}y^2dx+z^2dy+x^2dz$

$=-3\int_0^1t^2\,dt=-1$.

例. L 是 $z=3x^2+4y^2$ 与 $4x^2+y^2=4y$ 的交线，从 z 轴正向看，L 为顺时针方向. 求向量场 $\vec v=y(z+1)\vec i+3x\vec j+(xy-z)\vec k$ 沿 L 的环量.

从 z 轴正向：从上往下看. 顺 → 法向

D：$4x^2+y^2\le4y$. $3x^2+4y^2$，正向朝下.

$\therefore\oint_L\vec v\cdot d\vec r=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y(z+1)&3x&xy-z\\dydz&\cdot&\cdot\end{vmatrix}$

$=-\iint_D dxdy=\iint_D dxdy=2\pi$

例（综合 T3）. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 公共区域的面积. $(a>b>0)$.

对称性 ⇒ 为八块.

设 $x=br\cos\theta$，$y=ar\sin\theta$.

$0\le r\le1$，$0\le\theta\le\arctan\frac ba$

$b\sin\theta=a\cos\theta$

$\sigma(D)=8\iint 1\,dxdy=8ab\int_0^1\int_0^{\arctan\frac ba}r\,dr\,d\theta=4ab\arctan\frac ba$.

例（综合 T6）. 设 $f(t)$ 在 $|t|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续.

证明 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le1}f(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})\,dxdydz$

$=\frac23\pi\int_{-1}^1f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt$.

$a^2+b^2+c^2=0$ 时，等式 $\frac43\pi f(0)=\frac{2\pi}{3}\times2f(0)$，成立.

$a^2+b^2+c^2\ne0$ 时. 取正交阵 $A=\begin{pmatrix}&*&\\\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}&\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}&\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{pmatrix}$

令 $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$w=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

左边 $=\iiint_{u^2+v^2+w^2\le1}f(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}})\,dudvdw$. $u=r\sin\theta\cos\varphi$，$v=r\sin\theta\sin\varphi$，$w=r\cos\theta$

$=\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$=\frac13\times2\pi\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$.

$t=\cos\theta$，$=\frac{2\pi}{3}\int_{-1}^1f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt$.

例（综合 T4）$S:x^2+y^2+z^2=1$，$f(u)$ 连续.

求证 $\iint_S f(ax+by+cz)\,dS=2\pi\int_{-1}^1f(kt)\,dt$.

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

$a^2+b^2+c^2=0$，✓.

如果 $a^2+b^2+c^2>0$. 取正交阵 $A=\begin{pmatrix}&*&\\\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}&b&c\end{pmatrix}$

设 $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^T\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，$(x\ y\ z)=(u\ v\ w)A$

$\therefore w=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，$ax+by+cz=w\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

$\begin{cases}u=\sin\theta\cos\varphi\\v=\sin\theta\sin\varphi\\w=\cos\theta\end{cases}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{13}\\\vdots&&\vdots\\b_{31}&\cdots&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

$\therefore x'_\theta=b_{11}u'_\theta+b_{12}v'_\theta+b_{13}w'_\theta$

即 $(x'_\theta,y'_\theta,z'_\theta)=(u'_\theta,v'_\theta,w'_\theta)A$.

$(x'_\varphi,y'_\varphi,z'_\varphi)=(u'_\varphi,v'_\varphi,w'_\varphi)A$.

$E=1$，$F=0$. $G=\sin^2\theta$. $dS=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$.

$\therefore\iint_S f(ax+by+cz)\,dS$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$=-2\pi\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\,d\cos\theta$

$=2\pi\int_{-1}^1f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt$.

例（综合 T5）$x+y+z=t$ 被 $x^2+y^2+z^2=1$ 截为 $S(t)$，$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2)$.

则 $t\le\sqrt3$ 时，$\iint_{S(t)}F(x,y,z)\,dS=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$.

$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&*&\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$w=\frac{x+y+z}{\sqrt3}=\frac{t}{\sqrt3}$，$u^2+v^2=1-\frac{t^2}{3}$.

设 $\begin{cases}u=r\cos\theta\\v=r\sin\theta\\w=\frac{t}{\sqrt3}\end{cases}$ $0\le r\le\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}$，$0\le\theta\le2\pi$.

$(u'_r,v'_r,w'_r)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$

$(u'_\theta,v'_\theta,w'_\theta)=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)$.

$dS=\sqrt{EF-G^2}=r\,dr\,d\theta$.

$\iint_{S(t)}F(x,y,z)\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}(1-x^2-y^2-z^2)\,dr\,d\varphi$ $u^2+v^2+w^2$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}(1-r^2-\frac{t^2}{3})\,r\,dr\,d\theta$

$=\pi\int_0^{1-\frac{t^2}{3}}(1-r^2-\frac{t^2}{3})\,dr^2=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$

例. D 是平面上光滑闭曲线 L 围成，$f(x,y)$ 在 D 上有二阶偏导且满足 $\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=0$

求证 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零时，在 D 上也恒为零.

$\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D[v\Delta u+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}]\,dxdy$

取 $u=v=f$，则 $\oint_{\partial D}f\frac{\partial f}{\partial n}=0=\iint_D[f\Delta f+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2]\,dxdy$

$f=0$，$\therefore\iint_D(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2dxdy=0$.

$\therefore(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=0$. $f(x,y)$ 恒为常数.

$\therefore f(x,y)\equiv0$.

引理. A 正交矩阵，正交变换

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 下使 $S\to S_1$. $f(x,y,z)$ 连续，

则 $\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_{S_1}f\ dS$.

设 S 参数表示，$x=x(u,v)$. $y=y(u,v)$. $z=z(u,v)$

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. $\begin{cases}x_1=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z\\\vdots\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x'_{1u}=a_{11}x'_u+a_{12}y'_u+a_{13}z'_u\end{cases}$

即 $\begin{pmatrix}x'_{1u}\\y'_{1u}\\z'_{1u}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x'_u\\y'_u\\z'_u\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x'_{1v}\\y'_{1v}\\z'_{1v}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x'_v\\y'_v\\z'_v\end{pmatrix}$

$\therefore E_1=E$，$F_1=F$，$G_1=G$.

$\therefore\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$

$\iint_{S_1}f(x,y,z)\,dS=\iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,dudv$

例（综合 T8）$B(P_0,R)$ 上 $\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=0$.

求证 $r\in[0,R]$，$f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_L f(x,y)\,ds$.

令 $g(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{L_r}f(x,y)\,ds$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\,d\varphi$

$g'(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\,d\varphi$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\frac{\partial f}{\partial y})(-\sin\varphi)+\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi\,d\varphi$

旋转.

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x})\cdot\vec\tau\,ds$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{L_r}-\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy$

Green

$=\frac{1}{2\pi r}\int_{D_r}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial f}{\partial y})\,dxdy=0$.

$\therefore g(r)$ 为常数.

$g(r)=\lim_{r\to0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\,d\varphi$

$=\lim_{r\to0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_0,y_0)\,d\varphi=f(x_0,y_0)=f(P_0)$.

例（综合 T10）. $\Delta f=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2f}{\partial z^2}=0$.

对 $\forall\,0<r\le R$，$f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,dS$.

球面参数 $\begin{cases}x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi\\y=y_0+r\sin\theta\sin\varphi\\z=z_0+r\cos\theta\end{cases}$

$g(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}f(x,y,z)\,dS$

$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}=r^2\sin^2\theta\cos\varphi$

$=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi,y_0+r\sin\theta\sin\varphi,z_0+r\cos\theta)\,d\theta\,d\varphi$

$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}=r^2\sin^2\theta\sin\varphi$

$g'(r)=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=r^2\cos\theta\sin\theta$

$=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}\frac{\partial f}{\partial x}dydz+\frac{\partial f}{\partial y}dzdx+\frac{\partial f}{\partial z}dxdy$

$=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{V_r}\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2f}{\partial z^2}\,dV=0$.

$\therefore g(r)$ 恒为常数.

$0<r\le R$ 时，$g(r)=g(0)=f(P_0)$.