保守场

2022年4月29日 星期五 上午10:35

一、保守场.

1. 单连通区域：内部任一闭曲面内的点都在该区域内.

三维：闭曲面.

$R^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 不是单连通.

$R^3\setminus L$, $L=\{(0,0,z)\mid z\in R^3\}$ 是单连通.

曲面单连通. 任意封闭曲线连续收缩.
空间单连通 任意封闭曲面连续收缩.

$R^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 是曲面单连通.

$R^3\setminus L$ 不是曲面单连通.

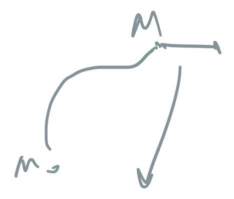
2. 定理.

$\vec v$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ 存在势函数 $\vec v=\nabla\varphi$.

$\Leftrightarrow$ $\nabla\times\vec v=0$.

1°→2°. $\vec v$ 是保守场. 固定 $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz$$



$$\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}Pdx=\int_x^{x+\Delta x}P(x,y,z)dx.$$

$\exists\delta>0$, 当 $0<\Delta x<\delta$ 时, $B(M,\delta)\in V$

$$\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}P(\xi,\eta,\gamma)d\xi$$

$\Delta x\to0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y,z)$

2°→3° $\vec v$ 有势, $\vec v=\nabla\varphi$.

$$\nabla\times\vec v=\nabla\times\nabla\varphi=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}&\frac{\partial\varphi}{\partial y}&\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

3°→1° $\vec v$ 无旋, $\nabla\times\vec v=\vec 0$.

V 中取闭曲线 L, 曲面单连通, 则存在 V 中的一个曲面 S, 以 L 为边界, $\oint_L\vec v\cdot d\vec r=\iint_S\nabla\times\vec v\cdot d\vec S=0$.

2°→1° $\int_{\widehat{AB}}\vec v\cdot d\vec r=\int_A^B\vec v\cdot d\vec r=\varphi B-\varphi A$.

$$\int_{\widehat{AB}}\vec v\cdot d\vec r=\int_{\widehat{AB}}\nabla\varphi\, d\vec r=\int_{\widehat{AB}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$=\int_\alpha^\beta[\varphi'_x x'(t)+\varphi'_y y'(t)+\varphi'_z z'(t)]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta d\varphi(x(t),y(t),z(t))$$

$$=\varphi(x(t),y(t),z(t))\Big|_\alpha^\beta=\varphi(B)-\varphi(A)$$

例. 证明 $\vec v=(x^2-yz)\vec i+(y^2-zx)\vec j+(z^2-xy)\vec k$ 是有势场, 并求势函数.

S1. $\nabla\times\vec v=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz&y^2-zx&z^2-xy\end{vmatrix}=(0,0,0)$

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-xy)dz$$

$$=\frac13(x^3+y^3+z^3)-xyz.$$

S2. 取 $\varphi(x,y,z)=\frac13(x^3+y^3+z^3)-xyz$

$d(\varphi(x,y,z))=\vec v$. 可证之.

例. 求 $\vec E=\frac{q}{r^3}\vec r$ 的势函数.

$\vec E$ 在 $R^3\setminus\{0,0,0\}$ 是无旋场, 有势.

$$\therefore\varphi(M)=\int_{M_0}^{M}\vec E\cdot d\vec r$$

$$=\int_{M_0}^{M}\frac{q}{r^3}\vec r\cdot d\vec r=\int_{M_0}^{M}\frac{q}{r^3}rdr$$

$$=q\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2}dr=-q\left(\frac1r-\frac1{r_0}\right).$$

例. 计算 $\int_{(1,0)}^{(3,1)}(e^y+1)dx+(xe^y-2y)dy$

S1. $d(xe^y+x-y^2)=(e^y+1)dx+(xe^y-2y)dy$.

二、向量势.

1. 无源场与向量势.

有向量势的 $\vec v$ 一定是无源场.

$\vec v=\nabla\times\vec a$, $\nabla\cdot\vec v=\nabla\cdot(\nabla\times\vec a)=0$.

$\vec v$ 是无源场, $\nabla\cdot\vec v=0$,

设 $\vec v=(P,Q,R)$, 设有势函数 (A,B,C).

则 $\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}=P(x,y,z)$

$\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}=Q(x,y,z)$

$\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}=R(x,y,z)$.

取 $C=0$, $-\frac{\partial B}{\partial z}=P$, $\frac{\partial A}{\partial z}=Q$.

取 $A=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)dz$,

则 $B=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)dz+f(x,y)$.

代入③ 得 $R=-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\Rightarrow\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial x}$

$=R-R(x,y,z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}$

$\therefore f(x,y)=\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)dx$

$\vec v$ 的一个向量势可以代入得到

$$\vec a=\left(\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)dz\right)\vec i+\left(-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)dz+\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)dx\right)\vec j.$$

2. 同一个 $\vec v$ 的两个向量势可不同.

$\vec v=\mathrm{rot}\,\vec a$, $\vec v=\mathrm{rot}\,\vec b$.

$\mathrm{rot}(\vec a-\vec b)=0$. $\vec a-\vec b$ 是无旋场.

$\therefore\exists\varphi$ 使 $\vec a-\vec b=\nabla\varphi$, 向量势存在相差一个梯度.

三、全微分方程.

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

设 (P,Q) 有势函数 φ, 则解为 $\varphi(x,y)=C$.

若 (P,Q) 有旋, 则取积分因子 $\lambda(x,y)$,

使 $\underline{\lambda(x,y)P(x,y)dx+\lambda(x,y)Q(x,y)}=0$,

成为全微分形式得 φ.