例题

2022年4月20日 星期三 下午6:10

一、第一型曲线积分

二、第一型曲面积分

三、第二型曲线积分

例. 计算 $\int_L xy\,dx + x^2 dy$，L 正向周界.

例. 力场 $\vec F = y\vec i - x\vec j + z\vec k$，沿螺旋线 $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = kt$.

例. $\vec F = -k\frac{mM}{r^3}\vec r$.

例. 向量场 $\vec u = \frac{-y\vec i + x\vec j}{x^2+y^2}$，$\vec v = \frac{x\vec i + y\vec j}{x^2+y^2}$. 沿 $L: x^2+y^2 = R^2$ 的环量.

例. $\vec v = \frac{-y\vec i + x\vec j}{x^2+y^2}$ 在不过原点的曲线上环量.

例. 多边形 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_n,y_n)$ 用 Green 公式计算面积.

例. $S: x+y+z=1$. $\vec F = y^2\vec i + z^2\vec j + x^2\vec k$ 沿 S 的正向边界一周所做的功.

例. 计算曲线积分 $\oint_L (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$，其中 L 是半球面 $x^2+y^2+z^2 = 4x\ (z\ge 0)$ 与柱面 $x^2+y^2 = 2x$ 的交线，从 z 轴正向看去顺时针.

设 $u(x,y), v(x,y) \in C^2(D)$，$D$ 边界 L 逐段光滑，$\vec n$ 是 L 的外法向量.

证明 (1) $\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n} ds = \iint_D (\nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v)\,dxdy$.

(2) $\oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dxdy$.

四、第二型曲面积分

例. $\vec v = \frac{-y\vec i + x\vec j}{x^2+y^2}$，$S: \{(x,0,z) \mid 1\le x\le 3,\ 0\le z\le 2\}$.

例. $\vec v = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$ 通过 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ 的通量. 对 $\vec E = \frac{q}{r^3}\vec r$.

例. $\vec v = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$，通过 $x^2+y^2 = a^2$，$-h\le z\le h$. 对 $\vec E = \frac{q}{r^3}\vec r$.

例. $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，$S$ 为半球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

例. $\iint y(x-z)dydz + x^2 dzdx + (y^2+xz)dxdy$，通过长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$.

例. $\iint x^3 dydz + y^3 dzdx$，$S$ 为半椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

例. L 是 $z = 3x^2+4y^2$ 与 $4x^2+y^2 = 4y$ 的交线，从 z 轴正向看，L 为逆时针方向. 求向量场 $\vec v = y(z+1)\vec i + 3x\vec j + (xy-z)\vec k$ 沿 L 的环量.

例 (综合T3). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 公共区域的面积. $(a>b>0)$.

例. 计算曲面积分 $I = \oiint_\Sigma \frac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 是曲面 $(x-1)^2+y^2+z^2 = a^2\ (a>0, a\ne 1)$ 外侧.

例. (综合T6) 设 $f(t)$ 在 $|t|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续. 证明 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) dxdydz = \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt$.

例. (综合T4) $S: x^2+y^2+z^2 = 1$，$f(t)$ 连续. 求证 $\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,dt$，其中 $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

例. (综合T5) $x+y+z = t$ 被 $x^2+y^2+z^2 = 1$ 截为 $S(t)$，$F(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2)$. 对 $t\le\sqrt3$ 时，$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,dS = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$.

---

3. 例. 曲线积分 $\int_L xy\,ds$，L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的弧长.

L 的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$

$\int_L xy\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot b\sin\theta\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\,d\theta$

$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\sin^2\theta$

$= \frac{ab}{2}\int_0^1\sqrt{b^2+(a^2-b^2)t}\,dt$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}(b^2+(a^2-b^2)t)^{\frac32}\Big|_0^1$

$= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

例. 求 $\int_L x\,ds$，其中 L 为三角形边界.

参数表示 $\overline{OA}: (x,y) = (t,t),\ t\in[0,1]$；$\overline{AB}: (x,y) = (t, 1-t)$；$\overline{BO}: (x,y) = (0,t)$.

$\int_L x\,ds = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t\sqrt2\,dt + \int_0^1 0\cdot dt = \frac{\sqrt2+1}{2}$

例. 求半径为 R 的球的表面积.

$x^2+y^2+z^2 = R^2$. $x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta$.

$|\vec r_\theta'| = R$，$|\vec r_\varphi'| = R\sin\theta$，$F = 0$，$E = R^2\sin^2\theta$，$G = R^2$.

$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{R^2 R^2\sin^2\theta}\,d\theta d\varphi = R^2\cdot 2\pi\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta = 4\pi R^2$.

例. 求球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 被柱面 $x^2+y^2 = Rx$ 所截下的曲面面积.

由 z 正负对称，$y>0, z>0$，最后乘 4.

$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} R^2\sin\theta\,d\theta d\varphi\times 4 = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi = 4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

例. 计算 $y^2+z^2 = x^2$ 被柱面 $y^2+z^2 = R^2$ 截的面积.

$x = \sqrt{y^2+z^2}$ 显式，两半.

$S = 2\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz = 2\sqrt2\pi R^2$.

2. 计算.

$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$，$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\varphi(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sigma(S_i) = \iint_S\varphi(x,y,z)\,dS$

$= \iint_D\varphi(x(u,v),y,z)\sqrt{EG-F^2}\,dudv$.

例. 设 S 是第一卦限的球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$，计算曲面积分 $\iint_S x^2y^2\,dS$.

$S: \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

则 $\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2\theta\cdot R^2\sin\theta\,d\varphi d\theta = \frac{\pi}{3}R^4$.

S_2. 对称，$\iint x^2 dS = \iint y^2 dS = \iint z^2 dS$.

例. 设 S 是 $z^2 = k^2(x^2+y^2)$ 被柱面 $x^2+y^2 = 2ax$ 所截得曲面，计算 $\iint_S (y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\,dS$.

难：显式 $z = k\sqrt{x^2+y^2}$.

$= \iint (k^2(x^2+y^2)^2+x^2y^2)\sqrt{1+k^2}\,dxdy$.

极坐标换元：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\varphi}(k^2r^4+r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\sqrt{1+k^2}\,r\,dr\,d\varphi$

$= \frac{64a^6\sqrt{1+k^2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\,d\varphi$

例. 若曲面 S 的球坐标表示 $\begin{cases} x = r(\theta)\sin\theta\cos\varphi \\ y = r(\theta)\sin\theta\sin\varphi \\ z = r(\theta)\cos\theta \end{cases}$ $(\theta,\varphi)\in D$，$r\in C^1$.

求证：曲面 S 面积为 $\sigma(S) = \iint_D\sqrt{r^2+r'^2}\,r\sin\theta\,d\theta d\varphi$.

$E = r'^2(\theta) + r^2(\theta)$，$G = r^2(\theta)\sin^2\theta$，$F = 0$.

$\sigma S = \iint_D\sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi = \iint_D\sqrt{r^2+r'^2}\,r\sin\theta\,d\theta d\varphi$.

例. 计算积分 $A = \iiint_V z\,dV$，其中 V 是球面 $x^2+y^2+z^2 = 2az$ 和 $x^2+y^2+z^2 = az$ 之间的立体.

$A = \iiint_{V_1} z\,dV - \iiint_{V_2} z\,dV$. 第一个球 $(0,0,a)$，第二个球 $(0,0,\frac{a}{2})$.

$= \iiint_{V_1}(z-a)\,dV + \iiint_{V_1}a\,dV - \iiint_{V_2}(z-\frac{a}{2})\,dV - \iiint_{V_2}\frac{a}{2}\,dV$. 对称，为零.

例. 计算 $\int_L xy\,dx + x^2 dy$，L 正向周界.

L_1 上，$0\le x\le 1$，$y = 0$，$dy = 0$，$\int_{L_1} xy\,dx + x^2 dy = 0$.

L_2 上，$x = 1$，$0\le y\le 2$，$dx = 0$，$\int_{L_2} xy\,dx + x^2 dy = \int_0^2 x^2 dy = 2$.

L_3 上，以 x 为参数，$x\in[0,1]$，$y = 2x$ (反向)，$\int_{L_3} = -\int_0^1 x\cdot 2x\,dx + x^2\cdot 2dx = -\frac{4}{3}$.

例. 力场 $\vec F = y\vec i - x\vec j + z\vec k$，沿螺旋线 $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = kt$.

$\vec r(t) = (-R\sin t, R\cos t, k)$ (dx, dy, dz)

$\int\vec F\cdot d\vec r = \int_0^{2\pi} R\sin t(-R\sin t) + (-R\cos t)R\cos t + kt\cdot k\,dt$

例. $\vec F = -k\frac{mM}{r^3}\vec r$.

轨迹 L 方程 $\vec r = \vec r(t)$.

$W = \int_{L_{AB}}\vec F\cdot d\vec r = -kmM\int_{L_{AB}}\frac{1}{r^3}\vec r\cdot d\vec r$.

$\vec r\cdot d\vec r = x(t)x'(t)dt + y(t)y'(t)dt + z(t)z'(t)dt = \frac12 d(x^2+y^2+z^2) = \frac12 dr^2 = r\,dr$.

$W = -kmM\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr = kmM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$.

例. 向量场 $\vec u = \frac{-y\vec i + x\vec j}{x^2+y^2}$，$\vec v = \frac{x\vec i + y\vec j}{x^2+y^2}$，沿 $L: x^2+y^2 = R^2$ 的环量.

$L: \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$

$\int_L\vec u\cdot d\vec r = \int_0^{2\pi}\left(\frac{-R\sin t\cdot(-R\sin t)}{R^2} + \frac{R\cos t\cdot R\cos t}{R^2}\right)dt = 2\pi$.

$\int_L\vec v\cdot d\vec r = 0$.

例. $\vec v = \frac{-y\vec i + x\vec j}{x^2+y^2}$ 在不过原点的曲线上环量.

$\vec v(P,Q)$，$P = \frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$. $(x,y)\ne(0,0)$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

若区域为 D (不包含原点)，则 $\vec v$ 在区域内部处处有定义，用 Green 公式 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$.

若为包含原点，$\vec v$ 在 $(0,0)$ 无定义，不能直接用 Green 公式. 作以 0 为圆心，ε 为半径的圆周 L_ε，使 L_ε 围成的闭区域在 D 内.

$\oint_L\vec v\cdot d\vec r - \oint_{L_\varepsilon}\vec v\cdot d\vec r = 0$，$\oint_L\vec v\cdot d\vec r = \oint_{L_\varepsilon}\vec v\cdot d\vec r = 2\pi$.

例. 多边形 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_n,y_n)$ 用 Green 公式计算面积.

$(x_{n+1},y_{n+1}) = (x_1,y_1)$.

$\sigma(D) = \oint_{\partial D} x\,dy = \sum_{k=1}^n\int_0^1[(1-t)x_k + tx_{k+1}](y_{k+1}-y_k)\,dt = \sum_{k=1}^n\frac{(x_k+x_{k+1})(y_{k+1}-y_k)}{2} = \sum_{k=1}^n\frac{x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k}{2}$.

例. $\vec F = y^2\vec i + z^2\vec j + x^2\vec k$，沿 S 的正向边界一周所做的功.

S_1. $\oint_{\partial S}\vec F\cdot d\vec r = \oint_{\partial S} y^2dx + z^2dy + x^2dz$，$\vec n(1,1,1)$. Stokes.

$= \iint_S (-2z,-2x,-2y)\cdot\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)\,dS = -\frac{2}{\sqrt3}\iint_S 1\,dS = -\frac{2}{\sqrt3}\times\frac{\sqrt3}{2} = -1$.

S_2. $L_1: (x,y,z) = (1-t,t,0)$；$L_2: (x,y,z) = (0,1-t,t)$；$L_3: (x,y,z) = (t,0,1-t)$.

原式 $= \int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3} y^2dx + z^2dy + x^2dz = -3\int_0^1 t^2dt = -1$.

例. 计算曲线积分 $\oint_L (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$，其中 L 是半球面 $x^2+y^2+z^2 = 4x\ (z\ge 0)$ 与柱面 $x^2+y^2 = 2x$ 的交线，从 z 轴正向看去顺时针.

S_1. 设曲面 S 为半球面 $x^2+y^2+z^2 = 4x\ (z\ge 0)$ 被柱体所截下的. 由 Stokes，$I = \iint_S\cdots$

$= -2\iint_S z\,dS$，$z = \sqrt{4x-x^2-y^2}$.

$= -2\iint 2\,dxdy = -4\pi$.

1. 质点在弹性力场中，弹力方向指向原点，大小与质点与原点的距离成 k 的正比，若质点沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 从点 $(a,0)$ 移到点 $(0,b)$，求弹力做功.

弹力，$\vec F = -kr\vec e_r$. $\Rightarrow$ 有势场.

$W = \int\vec F\cdot d\vec r = \int -kr\vec e_r\cdot d\vec r = \int -kr\,dr = \frac12 kr^2$.

做功与路径无关，$W = \int_a^b\vec F\cdot d\vec r = \frac12 k(a^2-b^2)$.

证明 (1) 设 L 的切向量 $\vec\tau = \left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right) = (\cos\alpha,\cos\beta)$，则外法向量 $\vec n = (\cos\beta,-\cos\alpha)$.

$\therefore\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v\cdot\vec n$ (方向导数定义).

$\therefore\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds = \oint_L u\nabla v\cdot\vec n\,ds = \oint_L u\,v_x'dy - u\,v_y'dx$ 投影.

$= \iint_D\left(\frac{\partial(uv_x')}{\partial x} - \frac{\partial(-uv_y')}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D\nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v\,dS$.

(2) $\oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \iint_D u\Delta v - v\Delta u\,dxdy$.

例. $\vec v = \frac{-y\vec i + x\vec j}{x^2+y^2}$，$S: \{(x,0,z)\mid 1\le x\le 3,\ 0\le z\le 2\}$.

易知 $\vec n = \vec j$. S 上 $\vec v = \frac{1}{x}\vec j$.

$\therefore\iint_S\vec v\cdot d\vec S = \iint\frac{1}{x}\vec j\cdot\vec j\,dzdx = \int_0^2\int_1^3\frac{1}{x}dxdz = 2\ln 3$.

例. $\vec v(x,y,z) = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$ 通过 $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

对 $\vec E = \frac{q}{r^3}\vec r$，$\iint_S\vec E\cdot d\vec S = q\iint_S\frac{\vec r}{r^3}\cdot\frac{\vec r}{r}dS = \frac{q}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi q$.

例. $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$，$S$ 为半球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

$= \frac{2}{5}\pi a^5$.

例. $\iint y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$ 通过长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$. S_2. Gauss 定理 (闭曲面).

例. L 是 $z = 3x^2+4y^2$ 与 $4x^2+y^2 = 4y$ 的交线 …… 从 z 轴正向看：从上往下看，逆 → 法向上. $D: 4x^2+y^2\le 4y$. $\oint_L\vec v\cdot d\vec r = \iint_D dxdy = 2\pi$.

例 (综合T3). 对称性 → 分为八块. 设 $x = br\cos\theta,\ y = ar\sin\theta$，$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le\arctan\frac{b}{a}$. $\sigma(D) = 8\iint_D dxdy = 8ab\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = 4ab\arctan\frac{b}{a}$.

例. 计算曲面积分 I …… 当 $0<a<1$ 时，O 在 Σ 外侧，由 Gauss，$I = 0$. 当 $a>1$ 时，O 在 Σ 内部，取充分小 $\varepsilon>0$，使 $x^2+y^2+4z^2 = \varepsilon^2$ 在 Σ 内，$I = \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint 3\,dxdydz = 2\pi$.

例. (综合T6) $a^2+b^2+c^2 = 0$ 时，$\frac43\pi f(0) = \frac{2\pi}{3}\cdot 2f(0)$，成立. $a^2+b^2+c^2\ne 0$ 时，取正交阵 A. 令 $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$w = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

左边 $= \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} f\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right)dudvdw = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt$.

例. (综合T4) …… $\therefore\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\sin\theta\,d\theta d\varphi = 2\pi\int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt$.

例. (综合T5) …… $w = \frac{x+y+z}{\sqrt3} = \frac{t}{\sqrt3}$，$u^2+v^2 = 1-\frac{t^2}{3}$. $\iint_{S(t)} F\,dS = 2\pi\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}(1-r^2-\frac{t^2}{3})r\,dr = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$.

例. D 是平面上光滑闭曲线 L 围成，$f(x,y)$ 在 $\bar D$ 上有二阶偏导且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. 求证 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零时，在 D 上也恒为零.

$\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint_D\left[v\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy$. 取 $u = v = f$，则 $\iint\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = 0$，$\therefore f(x,y)$ 恒为常数，$f(x,y) = 0$.

例. $P(x,y), Q(x,y)$ 有连续一阶偏导，对任一点 (x_0,y_0) 为圆心，$\forall r>0$ 的半圆 L $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$ 恒有 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. 证明：$P(x,y)\equiv 0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$.

…… $r\to 0$，$\therefore -2P(x_0,y_0) = 0$，$P(x,y)\equiv 0$. …… $\therefore\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$.

例. (综合T8) $B(P_0,R)$ 上 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. 求证 $r\in[0,R]$，$f(P_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{L_r} f(x,y)\,ds$.

令 $g(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{L_r} f(x,y)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)\,d\varphi$ …… Green $= 0$. $\therefore g(r)$ 为常数. $g(r) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\varphi = f(x_0,y_0) = f(P_0)$.

例. 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D: x^2+y^2\le\pi$ 上有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x^2+y^2)$，$\vec n$ 为边界圆周 ∂D 的单位外法向量，计算曲线积分 $I = \oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds$.

$I = \oint_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\vec n\,ds = \oint_{\partial D} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = \iint_D\sin(x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{\sqrt\pi}\int_0^{2\pi}\sin r^2\,r\,dr\,d\theta = 2\pi$.

1. $\oint (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)dz$. $L: x+y+z = 2$ 与 $|x|+|y| = 1$ 的交线.

$= -2\iint_D 6+x-y\,dxdy = -24$.

例. 证明 $\vec v = (x^2-yz)\vec i + (y^2-zx)\vec j + (z^2-xy)\vec k$ 是有势场，并求势函数.

S_1. $\nabla\times\vec v = 0$. $\varphi(x,y,z) = \frac13(x^3+y^3+z^3) - xyz$.

例. 求 $\vec E = \frac{q}{r^3}\vec r$ 的势函数. $\vec E$ 在 $\mathbb R^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 是无旋场，有势. $\varphi(M) = \int_{M_0}^M\vec E\cdot d\vec r = q\int_{r_0}^r\frac{1}{r^2}dr = -q\left(\frac1r - \frac{1}{r_0}\right)$.

例. 计算 $\int_{(1,0)}^{(3,1)}(e^y+1)dx + (xe^y-2y)dy$. S_1. $d(xe^y+x-y^2) = (e^y+1)dx + (xe^y-2y)dy$.

1. $\int_{(1,1)}^{(2,2)}\left(\frac1y\cos\frac xy - \frac{y}{x^2}\cos\frac yx + 1\right)dx + \left(\frac1x\cos\frac yx - \frac{x}{y^2}\cos\frac xy + \frac{1}{y^2}\right)dy$. $\varphi(x,y) = \sin\frac yx + \sin\frac xy + x - \frac1y$. 原式 $= \varphi(2,2) - \varphi(1,1) = \frac32$.

2. 求微分方程 $2xy\,dx + (y^2-x^2)dy = 0$. 齐次：$y\ne 0$，$\frac{2x}{y}dx + (1-\frac{x^2}{y^2})dy = 0$，$\frac{x^2}{y} + y = C$.

3. 设 $Q(x,y)$ 在 Oxy 平面上具有一阶连续偏导数，$\int_L 2xy\,dx + Q(x,y)dy$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx + Q(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx + Q(x,y)dy$，求 $Q(x,y)$.

与路径无关，$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$，$Q(x,y) = x^2 + f(y)$. …… 得 $f(t) = 2t - 1$，$Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$.