二重积分

2022年2月1日 星期二　　下午4:51

一、平面区域的面积

1. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 有界
存在一个方形 $[a,b]\times[a,b]$，
使 $D\subset[a,b]\times[a,b]$.
分割 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$
$a=y_0<y_1<\cdots<y_n=b$.　$D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$. $1\le i\le n,\ 1\le j\le m$.
记 $\mu_T^+(S)$ 为与 S 相交的方形面积
$\mu_T^-(S)$ 为被 S 包含的方形面积
$\Rightarrow 0\le\mu_T^-(S)\le\mu_T^+(S)\le(b-a)^2$.
$0\le\mu_T^+(S)-\mu_T^-(S)=\mu_T^+(\partial S)$ 边界方形.

2. 定义：若 $\lim\limits_{|T|\to0}\mu_T^+(S)=\lim\limits_{|T|\to0}\mu_T^-(S)$，则称 S 为 Jordan 可测.
面积称为测度.

例. $D=\{(x,y)\mid x.y$ 是 $[0,1]$ 上的有理数$\}$.
$\partial D=[0,1]^2=1$. 每个点都是边界.
$\therefore\mu_T^+(\partial D)=1\ne0$，不可测.

例. $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 连续.
$D=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in[a,b]\}$.
$\because\sum w_i\Delta x_i\to0$，
$\therefore D$ 可测，且为零测集.

∗ $f(x)$ 可积 $\Leftrightarrow D_f$ 可测且为零测集.

二、二重函数

1. 定义：设 $f|_D$，$D\subset\mathbb{R}^2$ 可测. 作 D 的任意分割 T: $D_1\cup D_2\cdots\cup D_n$，其中 D_i 可测，
记 $|T|=\max\{\operatorname{diam}D_i\mid i=1,\dots n\}$.
(ξ_i,η_i) 为 D 中任意一点，$1\le i\le n$，
若 Riemann 和 $\lim\limits_{|T|\to0}\sum f(\xi_i,\eta_i)\mu(D_i)$ 存在，
则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积，$A=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$.
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|T|<\delta$ 时，有
$|\sum f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i-A|<\varepsilon$.

2. 性质.
① $f|_D$ 可积 $\Rightarrow f|_D$ 有界.
有界不一定可积（二维 Dirichlet）.
② $f|_D$ 可积 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上的 Darboux 上/下和的下/上确界相等.
Darboux 上和 $\overline{S}(T)=\sum M_i\Delta D$，$M_i$ 为 $\sup f(x,y)$
Darboux 下和 $\underline{S}(T)=\sum m_i\Delta D$，$m_i$ 为 $\inf f(x,y)$
$\Rightarrow\inf\limits_T\overline{S}(T)=\sup\limits_T\underline{S}(T)\Leftrightarrow\inf\limits_T(\overset{w(T)}{\overline{S}(T)-\underline{S}(T)})=0$.
③ 改变 $f(x,y)$ 在有限个点（连续曲线）的值，可积性不改变.
④ 有界可测 D 上的连续函数可积.
⑤ 线性性.
⑥ 保序性：$f|_D\ge g|_D$，$\int_D f\ge\int_D g$.
⑦ 中值公式：设 D 是有界连通的闭区域，f 在 D 上连续，则 $\exists(x_0,y_0)\in D$，使得 $\int_D f=f(x_0,y_0)|D|$
$m\le f(x,y)\le M$，
$m|D|\le\int_D f(x,y)\le M|D|$.
$m\le\frac{1}{|D|}\int_D f(x,y)\le M$.
⑧ 积分区域可加性.

三、积分的计算

设 $f|_D$ 可积.
1. 若 $D=[a,b]\times[c,d]$，
取 $T\begin{cases}T_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.\\T_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d.\end{cases}$
$D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$　　$|T_x|,|T_y|<|T|<|T_x|+|T_y|$
$\Delta x_i,\Delta y_j<\operatorname{diam}D_{ij}=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_j^2}\le\Delta x_i+\Delta y_j$.
取 $(\xi_i,\eta_j)\in D_{ij}$，$\sum f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j\to A$.
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|T|<\delta$ 时，
$A-\varepsilon<\sum\limits_{i=1,j=1}^{n,m}f(\xi_i,\eta_j)<A+\varepsilon$
$A-\varepsilon<\sum\limits_{j=1}^{m}\big(\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i}_{f(x,\eta_j)\text{ 的 Riemann 和}}\big)\Delta y_j<A+\varepsilon$.
如果对 $y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 作为 $[a,b]$ 的函数可积，则 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$.
如果 $\varphi(y)$ 对 y 可积，$\int_c^d\varphi(y)\,dy=\int_c^d\int_a^b f\,dx\,dy$.
若对 $\forall y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 在 $x\in[a,b]$ 上可积，
记 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$，
即 $\lim\limits_{|T|\to0}\sum f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i=\varphi(\eta_j)$，
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|T|<\delta$ 时，
$-\varepsilon<\sum f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i-\varphi(\eta_j)<\varepsilon$.
$\varphi(\eta_j)-\varepsilon<\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i<\varphi(\eta_j)+\varepsilon$
$\sum\limits_{j=1}^m\varphi(\eta_j)\Delta y_j-\varepsilon'<\sum\limits_{j=1}^m\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j<\sum\limits_{j=1}^m\varphi+\varepsilon'$.
$\therefore\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 可积，
$\int_c^d\varphi(y)\,dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$.

$\Rightarrow$ 定理：设 $f|_D$ 可积，$D=[a,b]\times[c,d]$，
若 $\int_a^b f(x,y)\,dx$ 对 $\forall y\in[c,d]$ 可积，
则 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)$ 对 y 可积，
且 $\int_c^d\varphi(y)\,dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy=\int_D f\,d\sigma$
或记为 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

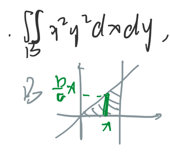
例. $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$，$D=[0,1]\times[0,1]$
$\varphi(y)=\int_0^1 e^y\int_0^1 e^x\,dx\,dy$
$=\int_0^1 e^y\cdot(e-1)\,dy=(e-1)^2$.

例. $\iint_D x\cos xy\,dx\,dy$，$D=[0,\pi]\times[0,1]$.
$\int_0^\pi x\cos yx\,dx=\frac1y\int_0^\pi x\,d\sin yx$
$=\frac1y(x\sin yx|_0^\pi-\int_0^\pi\sin yx\,dx)$
$=\frac1y(\pi\sin\pi y+\frac1y\int_0^\pi d\cos yx)$
$=\frac1y(\pi\sin\pi y+$
先对 y 积分：$\int_0^\pi(\int_0^1 x\cos xy\,dy)\,dx$
$=\int_0^\pi\sin xy|_0^1\,dx$
$=\int_0^\pi\sin x\,dx=-\cos x|_0^\pi=2$.

2. $D=\{(x,y)\mid\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$.
其中 $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ 且连续.　I 型闭区域
$\iint_D f=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy$
$D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le x\le d\}$
$\iint_D f=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,dy$.　II 型闭区域
证明：取 $D\subset[a,b]\times[c,d]$，
定义 $f^*(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D\\0, & (x,y)\notin D\end{cases}$ → 满足可积的条件.
$\iint_{[a,b]\times[c,d]}f^*=\int_a^b dx\int_c^d f^*\,dy$
$=\int_a^b dx(\int_c^{\varphi_1(x)}+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}+\int_{\varphi_2(x)}^d f^*\,dy)=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f\,dy$.

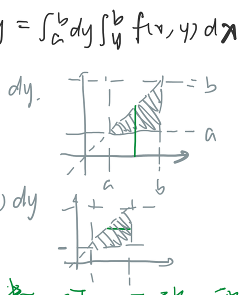
3. 若 D 可以分解成 2，则可分片利用累次积分.

4. 例. $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$，$y=0$. $x=a$. $y=\frac bax$ 围成.



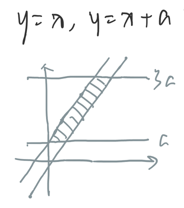
$\int_0^a\int_0^{\frac bax}x^2y^2\,dy\,dx=\int_0^a\frac{x^2}{3}y^3|_0^{\frac bax}\,dx$
$=\int_0^a\frac{x^2}{3}\times\frac{b^3}{a^3}x^3\,dx=\frac{a^6}{6}\times\frac{b^3}{3a^3}=\frac{a^3b^3}{18}$

例. $f(x,y)$ 连续，证明：
$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx$
对 $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy$.
对 $\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dy$



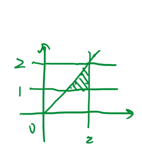
证明：连续函数，对 x 可积，积完后对 y 也可积. 交换顺序相等.

例. $\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$，D 由 $y=a\,(a>0)$，$y=3a$，$y=x$，$y=x+a$ 围成.



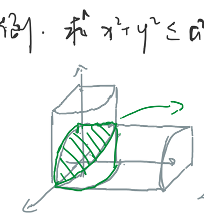
原式 $=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,dx$
$=\int_a^{3a}\frac13(y^3-(y-a)^3)\,dy$
$=\frac13\int_a^{3a}(3ay^2-3a^2y+3a^3)\,dy$
$=\frac13($

例. 求 $\int_1^2 y\,dy\int_y^2\frac{\sin x}{x^2-1}\,dx$.
D: $1\le y\le2$，$y\le x\le2$.
$\Rightarrow1\le y\le x$，$1\le x\le2$.



$=\int_1^2dx\int_1^x dy\frac{y\sin x}{x^2-1}$
$=\int_1^2dx\frac{\sin x}{x^2-1}(\frac12y^2|_1^x)$
$=\frac12\int_1^2dx\frac{\sin x}{x^2-1}(x^2-1)$.

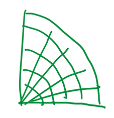
例. 求 $x^2+y^2\le a^2$，$x^2+z^2=a^2$. 相交的体积.



$z=\sqrt{a^2-x^2}$
$D(x,y)$，$x^2+y^2\le a^2$
体积 $\iint_D\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy$.
$=\int_0^a dx(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy)$
$=\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac23a^3$.
总 $\frac{16}{3}a^3$.

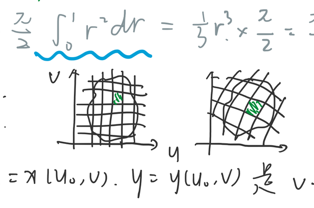
四、换元

1. 引入
例. $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$. D: $x^2+y^2\le1$，$x\ge0$，$y\ge0$.
原式 $=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy$. 计算量大.



分割：$0=r_0<\cdots<r_n=1$
$0=\theta_0<\cdots<\theta_n=\frac\pi2$
$\mu(D_{ij})=\frac12r_i^2\Delta\theta_j-\frac12r_{i-1}^2\Delta\theta_j$
$=\frac12(r_i+r_{i-1})\Delta r_i\Delta\theta_j$.
$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\y=r\sin\varphi.\end{cases}$　$r\in[0,1]$　$\varphi\in[0,\frac\pi2]$
$\int_0^1\int_0^{\frac\pi2}r\cdot r\,dr\,d\varphi$.
$\int_D\sqrt{x^2+y^2}=\lim\sum f(r_i,\theta_j)\mu D_{ij}$
$=\lim\sum\sqrt{x^2+y^2}\,\Big|_{\substack{x=r_i\cos\theta_j\\y=r_i\sin\theta_j}}r_i\Delta r_i\Delta\theta_j$.
$=\lim\sum\limits_{i=1}^n r_i(\Delta r_ir_i)\frac\pi2$
$=\lim\frac\pi2\sum\limits_{i=1}^n r_i^2\Delta r_i$
$=\lim\frac\pi2\int_0^1r^2\,dr=\frac13r^3\times\frac\pi2=\frac\pi6$.

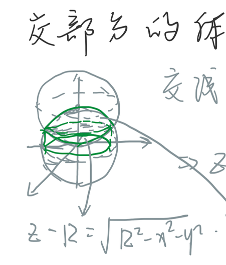
2. 设 $\begin{cases}x=x(u,v).\\y=y(u,v)\end{cases}$



u 固定为 u_0，$x=x(u_0,v)$. $y=y(u_0,v)$ 是 v-曲线.
v 固定为 v_0，$x=x(u,v_0)$. $y=y(u,v_0)$ 是 u-曲线.
(u_0,v_0)　$(u_0+\Delta u,v_0)$
$(u_0,v_0+\Delta v)$　$(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$
$\Rightarrow(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))$ 对应.
$ds=|x(u_0+\Delta u,v_0)-x(u_0,v_0)||y(u_0,v_0+\Delta v)-y(u_0,v_0)|$.
$=|(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+o(\Delta u))(\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v+o(\Delta v))-(\quad)(\quad)|$
$=|(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u})|\Delta u\Delta v$.
$=\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\text{放大倍数}}du\,dv=dx\,dy$（面积元）
$\therefore\sum f(\xi_i,\eta_j)\Delta D_{ij}=\sum f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u_i\Delta v_j$
$\iint_{D'}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$.

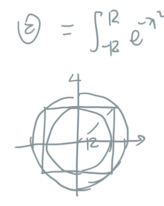
2. 例. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的体积.
$V=c\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$.
令 $x=as$. $y=bt$.　$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=ab$.
$=c\iint_{s^2+t^2\le1}\sqrt{1-s^2-t^2}\,d(as)\,d(bt)$
$=abc\iint_{s^2+t^2\le1}\sqrt{1-s^2-t^2}\,ds\,dt$
令 $s=r\cos\theta$，$t=r\sin\theta$. $\frac{\partial(s,t)}{\partial(r,\theta)}=r$.
$=abc\iint_{\substack{0\le r\le1\\0\le\theta\le\frac\pi2}}\sqrt{1-r^2}\,r\,dr$
$=2abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr$.
$=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac43\pi abc$

例. 求 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 与 $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$ 相交部分的体积.



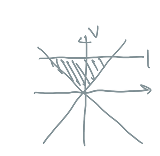
交线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2+(z-R)^2=R^2.\end{cases}$
$\Rightarrow z=\frac R2$，$x^2+y^2=R^2-\frac{R^2}{4}=\frac34R^2$.
$z-R=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.　$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.
$\therefore V=\iint_{x^2+y^2=\frac34R^2}(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-(R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}))\,dx\,dy$
$=\iint_{x^2+y^2\le\frac34R^2}(2\sqrt{R^2-x^2-y^2}-R)\,dx\,dy=\frac{5}{12}\pi R^3$

例. 求 $\iint_{x^2+y^2\le R^2}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$，$\iint_{\substack{-R\le x\le R\\-R\le y\le R}}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.
① $=\iint_{\substack{0\le r\le R\\0\le\theta\le2\pi}}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^R dr\,e^{-r^2}r\int_0^{2\pi}d\theta$.
$=2\pi\int_0^R e^{-r^2}r\,dr=\pi(-e^{-r^2})|_0^R=\pi(1-e^{-R^2})$.
② $=\int_{-R}^R e^{-x^2}\int_{-R}^R e^{-y^2}\,dy\,dx=(\int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx)^2$.



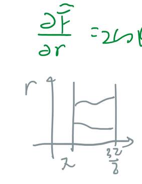
$\pi(1-e^{-R^2})\le(\int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx)^2\le\pi(1-e^{-2R^2})$
$\therefore\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt\pi}{2}=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$.

例. $A=\iint_D e^{(\frac{x-y}{x+y})}\,dx\,dy$. D: $x\ge0$，$y\ge0$，$x+y\le1$.
$\int_0^1dy\int_0^x e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx$.
换元：$\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{u+v}{2}\\y=\frac{v-u}{2}.\end{cases}$
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac12&\frac12\\-\frac12&\frac12\end{vmatrix}=\frac12$.
$u+v\ge0$，　$u\ge-v$
$v-u\ge0$，　$v\ge u$
$\frac{u+v+v-u}{2}\le1$　$v\le1$.



$\int_0^1dv\int_{-v}^v e^{\frac uv}\,du\times\frac12=\frac12\int_0^1v(e-e^{-1})\,dv=\frac12\sinh1$.

例. 求 $I=\iint_D\frac{d(x,y)}{xy(\ln^2x+\ln^2y)}$，$D$: $x+y\ge1$，$x^2+y^2\le1$.
换元 $\begin{cases}x=e^{r\cos\theta}\\y=e^{r\sin\theta}\end{cases}$　$e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}\ge1$
$e^{2r\cos\theta}+e^{2r\sin\theta}\le1$.
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=re^{r\cos\theta+r\sin\theta}$
$I=\iint_{D'}\frac{1}{e^{r\cos\theta+r\sin\theta}\times r^2}r\times e^{r\cos\theta+r\sin\theta}\,dr\,d\theta$
D'. $0\le x,y\le1$，$\cos\theta\le0$，$\sin\theta\le0$，$\theta\in[\pi,\frac32\pi]$.
$F(r,\theta)=e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}=1$，$r=\varphi(\theta)$
$\frac{\partial F}{\partial r}=\cos\theta e^{r\cos\theta}+\sin\theta e^{r\sin\theta}\ne0$. $\theta\in[\pi,\frac32\pi]$.
$\hat F(r,\theta)=e^{2r\cos\theta}+e^{2r\sin\theta}=1$. $r=\psi(\theta)$.
$\frac{\partial\hat F}{\partial r}=2\cos\theta e^{2r\cos\theta}+2\sin\theta e^{2r\sin\theta}$，$\theta\in[\pi,\frac32\pi]$.

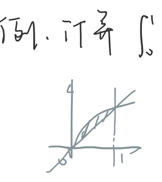


$\hat F(r,\theta)=F(2r,\theta)$. $2\psi(\theta)=\varphi(\theta)$.
$I=\int_\pi^{\frac32\pi}d\theta\int_{\psi(\theta)}^{\varphi(\theta)}\frac1r\,dr=\int_\pi^{\frac32\pi}d\theta\ln r|_{\psi(\theta)}^{2\psi(\theta)}$
$=\frac\pi2\ln2$.

1. 二重积分.
D: $[a,b]\times[c,d]$.
D_{ij}: $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$.
任取 $M_{ij}(\xi_i,\eta_j)\in D_{ij}$.
黎曼和 $S(T,M)=\sum\limits_{i,j}f(M_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$
$=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^m f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j$.
① 定义. $|\sum\limits_{i,j}f(M_{ij})\Delta x_i\Delta y_j-A|<\varepsilon$.
$\overline{S}(T)=\sum\limits_{j=1}^n M_i\sigma(D_i)$. $\underline{S}(T)=\sum\limits_{i}^n m_i\sigma(D_i)$.
② 可积. 取标准闭矩形 D_1 使 $D\subset D_1$.
$f^*=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D\\0, & (x,y)\in D_1\setminus D.\end{cases}$
若 f^* 在 D_1 上可积，则 f 在 D 上可积.
$\iint_{D_1}f^*\,dx\,dy=\iint_D f\,dx\,dy$.
若 D 有界，1 在 D 上可积，则 D 为有面积的.
且 $\sigma(D)=\iint_D1\,dx\,dy$.
（不是所有有界区域都有面积，如 Dirichlet）.　→可测.
③ 任意一种不规则分割. → 可定义.
④ 曲线 $y=f(x)$ 连续 → 面积为 0.
$(x(t),y(t))$ 连续 → 面积不一定为 0（写出面积为 0 的条件…）
⑤ 计算. $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ 连续.
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$.
证明：分割. $A-\frac\varepsilon2<\sum\limits_{j=1}^m\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j<A+\frac\varepsilon2$.
$\therefore A-\frac\varepsilon2<\sum\limits_{j=1}^m\Delta y_j\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i<A+\frac\varepsilon2$
固定 Δy_j，令 $|T_x|\to0^+$，
$A-\varepsilon<A-\frac\varepsilon2<\sum\limits_{j=1}^m\int_a^b f(x,\eta_j)\,dx\,\Delta y_j\le A+\frac\varepsilon2<A+\varepsilon$.
$\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积.
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$
二重　　累次.

例. $\iint f(x,y)\,dx\,dy=\iint\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy$
其中 D: $[a,b]\times[c,d]$.
$\iint\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy=\int_a^b\varphi(x)\,dx\int_c^d\psi(y)\,dy$.　本题的证明.
故只需证 $\varphi(x)$ 对 $\forall y\in[c,d]$ 在 $[a,b]$ 可积
$\psi(y)$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 在 $[c,d]$ 可积.
$\because\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使对 $x\in[a,b]$ 时的分 T_x，
只要 $\|T_x\|<\delta$，就有 $\sum\limits_{i=1}^n w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-c}$.
其中 w_i 为 $\varphi(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅.
$\therefore$ 对 $[a,b]\times[c,d]$ 上的任意 T_x，T_y，
只要 $\|T_x\|,\|T_y\|<\delta$，
就有 $\sum\limits_{j=1}^m w_jw_i\Delta x_i\Delta y_j$
$=(d-c)\sum\limits_{i=1}^n w_i\Delta x_i<(d-c)\frac{\varepsilon}{d-c}=\varepsilon$.

例. 计算 $\int_0^1[\int_x^{\sqrt x}\frac{\sin y}{y}\,dy]\,dx$

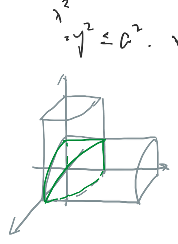


$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\int_{y^2}^{y}1\,dx\,dy$　　$y\,d\cos y$
$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)\,dy$　　$-y\cos y+\int\cos y\,dy$
$=\int_0^1\sin y-y\sin y\,dy$　$=\int\sin y(1-y)\,dy$
$=[\sin y-(-y\cos y-\sin y)]|_0^1$　$=1-\sin1$

例. $\iint_{|x|+|y|\le1}x^2y^2\,dx\,dy$

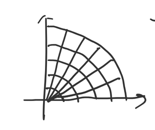
$=4\int_0^1\int_0^{1-x}y^2\,dy\,x^2\,dx$
$=\frac43\int_0^1(1-x)^3x^2\,dx=\frac{1}{45}$
$\star B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$
$=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
$=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$

$x^2+y^2\le a^2$. $x^2+z^2\le a^2$ 的相交体积.

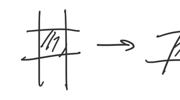


$8\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy$.
$=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\sqrt{a^2-x^2}\,dx$
$=8\int_0^a(a^2-x^2)\,dx$

2. 换元.



T: $0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\frac\pi2$
$0=r_0<r_1<\cdots<r_m=1$
$\sigma(D_{ij})=\frac12(r_i^2-r_{i-1}^2)(\theta_j-\theta_{j-1})$
$=\frac12(r_i+r_{i-1})(r_i-r_{i-1})(\theta_j-\theta_{j-1})$
$\approx r_i\Delta r_i\Delta\theta_j$.
$S(T)\approx\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^m f(r_i\cos\theta_j,r_i\sin\theta_j)r_i\Delta r_i\Delta\theta_j$.
$=\frac\pi2\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{r_i^2\cos^2\theta_j+r_i^2\sin^2\theta_j}\,r_i\Delta r_i$
$\to\frac\pi2\int_0^1r^2\,dr=\frac\pi6$.



$\Delta\sigma=|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_4}|$
$=|(x_2-x_1)(y_4-y_1)-(x_4-x_1)(y_2-y_1)|$
$x_2-x_1=x(u+\Delta u,v)-x(u,v)=\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+o(\Delta u)$.
$=|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}|\Delta u\Delta v$.
$=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$.
$\therefore$ 换元时 $d\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$.
要求 $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne0$，
但换元包括原点时可以仍成立.

例. 求椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1$ 的体积.
$D=\{(x,y)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1\}$，$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.
$V=2\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$.
换元 $\begin{cases}x=as\\y=bt\end{cases}$　$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=ab$，$D'=s^2+t^2\le1$
$V=2abc\iint_{s^2+t^2\le1}\sqrt{1-s^2-t^2}\,ds\,dt$　　$s=r\cos\varphi$　$t=r\sin\varphi$
$=2abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\varphi$
$=2\pi abc\frac23(1-r^2)^{\frac32}=\frac43\pi abc$.

例. 求积分 $\iint_D\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$，其中 $D=\{(x,y)\mid e^x+e^y\ge1,\ e^{2x}+e^{2y}\le1\}$.
① 换元 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$　$e^{2x}+e^{2y}\le1$，$x.y<0$.
$r>0$，由 $e^{2x}+e^{2y}\le1$，得 $\cos\theta<0$，$\sin\theta<\frac32\pi$. $\theta\in(\pi,\frac32\pi)$.
②

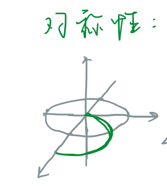
要证 $(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 与 D 有交点.
令 $f(r)=e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}-1$，$0\le r<+\infty$，　与 $e^x+e^y=1$ 的交点
$e^x+e^y=1$　$e^{2x}+e^{2y}=1$
易知 $f(r)$ 单调减.
$f(0)=1>0$，$\lim\limits_{r\to+\infty}f(r)=-1<0$.
$\therefore$ 存在唯一正实数 $g(\theta)$ 使 $f(g(\theta))=0$.　r 的大小，满足该式的值与 θ 有关.
③ 令 $D'=\{(r,\theta)\mid\pi<\theta<\frac32\pi,\ \frac12g(\theta)\le r\le g(\theta)\}$.
$\therefore\iint\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}=\iint_{D'}\frac{1}{r^2}r\,dr\,d\theta$
$=\int_\pi^{\frac32\pi}(\int_{\frac12g(\theta)}^{g(\theta)}\frac{dr}{r})\,d\theta$

例. 求 $\iint_D(\sqrt x+\sqrt y)\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid\sqrt x+\sqrt y\le1\}$.
S_1. 设 $x=r^2\cos^4t$，$y=r^2\sin^4t$.　$1\ge\sqrt x+\sqrt y=r$.
$r\in[0,1]$. $t\in[0,\frac\pi2]$.
S_2. 累次积分.
原式 $=2\iint_D\sqrt x\,dx\,dy=2\int_0^1\int_0^{(1-\sqrt x)^2}\sqrt x\,dy\,dx$　$x.y$ 完全对称.
$=2\int_0^1\sqrt x(1-\sqrt x)^2\,dx$
$=2\int_0^1t(1-t)^2\,2t\,dt$.
$=4\int_0^1t^2(1-t)^2\,dt$
$=4B(3,3)=4\frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)}=4\frac{2!\,2!}{5!}=\frac{2}{15}$.
$\iint_D\sqrt x\,dx\,dy+\iint_D\sqrt y\,dx\,dy$，$\iint_D\sqrt x\,dx\,dy=\iint_D\sqrt y\,dx\,dy$.

仿射变换.
$\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}$　$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$.　$\frac{S'}{S}=|ad-bc|$
$S'=\iint1\,dx'\,dy'=\iint|ad-bc|\,dx\,dy$

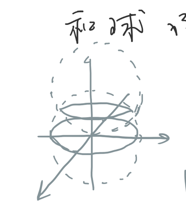
例. $|5x+6y|+|9x+11y|\le1$ 表示的图形面积.
$\begin{cases}x'=5x+6y\\y'=9x+11y.\end{cases}$　$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}=1$.
$|x'|+|y'|\le1$. $S'=2=S$.

例. 求球 $x^2+y^2+z^2\le a^2\,(a>0)$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 所截下的体积 V.
对称性：$x.z$ 偶次方. 取 $x\ge0$，$z\ge0$.



$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.
$4\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$　$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{cases}$
$=4\int_0^{\frac\pi2}[\int_0^{a\sin\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr]\,d\varphi$
$=\frac43\int_0^{\frac\pi2}(a^2-r^2)^{\frac32}|_{a\sin\varphi}^0\,d\varphi$
$=\frac43a^3\int_0^{\frac\pi2}(1-\cos^3\varphi)\,d\varphi$

例. 求球 $x^2+y^2+z^2\le R^2\,(R>0)$ 和球 $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$ 相交部分体积.

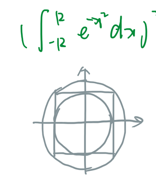


交线 $\begin{cases}x^2+y^2=\frac34R^2\Rightarrow\text{“底”}\\z=\frac R2\end{cases}$
$V=2\iint_{x^2+y^2\le\frac34R^2}(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\frac R2)\,dx\,dy$
$=2\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy-\underline{2\iint\frac R2\,dx\,dy}$　直接，可不换元.
$=2\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}R}\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2-r^2}\,r\,d\theta\,dr-R\times\pi\frac34R^2$.
$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}R}\sqrt{R^2-r^2}\,dr^2-\frac34\pi R^3$.
$=2\pi\times\frac23(R^2-r^2)^{\frac32}\Big|_{\frac{\sqrt3}{2}R}^0-\frac34\pi R^3=\frac{5}{12}\pi R^3$.

例. 求双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$，$a>0$ 所围成的面积.
设 $x,y\ge0$，设 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，
$r^4=2a^2r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$，$r^2=2a^2\cos2\varphi>0$.
$\therefore\varphi\in[0,\frac\pi4]$.
换元后 $D'=\{(r,\varphi)\mid0\le\varphi\le\frac\pi4,\ 0\le r\le a\sqrt{2\cos2\varphi}\}$
$S=4\iint_D dx\,dy=4\int_0^{\frac\pi4}\int_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}}r\,dr\,d\varphi$
$=2\int_0^{\frac\pi4}a^2\,2\cos2\varphi\,d\varphi=2a^2$.

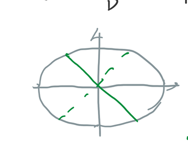
例. 积分 $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$，D 由 $y^2=px$，$y^2=qx$，$x^2=ay$，$x^2=by$ 围成.
$u=\frac{y^2}{x}\in[p,q]$. $v=\frac{x^2}{y}\in[a,b]$.
$x=u^{\frac13}v^{\frac23}$，$y=u^{\frac23}v^{\frac13}$.（反解）
$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\frac{y^2}{x^2}&\frac{2y}{x}\\\frac{2x}{y}&-\frac{x^2}{y^2}\end{vmatrix}=-3$.
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac13$.（绝对值互为倒数）.
又 $uv=xy$，可不用反解.
原式 $=\int_a^b\int_p^q u^2v^2\times\frac13\,du\,dv=\frac{1}{27}(q^3-p^3)(b^3-a^3)$.

例. $\iint_{x^2+y^2\le R^2}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.
原式 $=\int_0^R\int_0^{2\pi}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^R e^{-r^2}\cdot\frac12\,dr^2$
$=\pi e^{-r^2}|_R^0=\pi(1-e^{-R^2})$
求 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$.
$(\int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx)^2=\int_{-R}^R\int_{-R}^R e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy$.



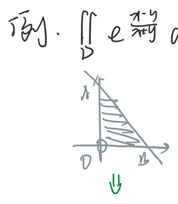
$\pi(1-e^{-R^2})\le(\int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx)^2\le\pi(1-e^{-2R^2})$
$R\to+\infty$，$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt\pi$.

例. $I=\iint_D\arctan\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\,dx\,dy$，$D$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1$.

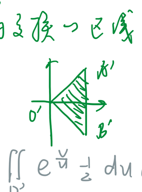


定义域 $x=-y$ 去除.
但被积函数有界 $[0,\frac\pi2]$，
去除间断处为 0 测集，仍可积.
$f(x,y)=\arctan\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\,dx\,dy$　同时可去掉 $y=x$
$f(x,-y)=\arctan\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\,dx\,dy$　$(x'=x,\ y'=-y)$.
$\therefore I=\iint_D\arctan\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\,dx\,dy=\iint_D\arctan\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\,dx\,dy$.
$=\frac12\iint\arctan\left|\frac{x+y}{x-y}\right|+\arctan\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\,dx\,dy$
$=\frac12\iint_D\frac\pi2\,dx\,dy=\frac{\pi^2}{4}ab$.　对 $x.y$ 换对称.

例. $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$，$D=\{(x,y)\mid x+y\le1,\ x\ge0,y\ge0\}$.

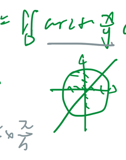


$\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$　$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac12$.
仿射变换 → 区域变形.
$A(0,1)$，$A'(1,-1)$.
$B(1,0)$，$B'(1,1)$.



$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy=\iint_{D'}e^{\frac vu}\frac12\,du\,dv$
$=\frac12\int_0^1\int_{-u}^u e^{\frac vu}\,dv\,du$.　$ue^{\frac vu}$
$=\frac12\int_0^1ue^{\frac vu}|_{-u}^u\,du=\frac12\int_0^1u(e-\frac1e)\,du$
$=\frac14(e-\frac1e)$.

例. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$. $I=\iint_D\arctan\frac yx\,dx\,dy$.
$I=\iint_D\arctan\frac yx\,dx\,dy=\iint_D\arctan\frac xy\,dx\,dy$
关于 $y=x$ 对称.



$\therefore I=\iint_D\frac\pi4\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{4}$

∗若改为 $x^2+y^2\le1$，$y\le0$，$y\ge x$.（$\frac18$ 圆）.
$r\in[0,1]$，$\varphi\in[\pi,\frac54\pi]$.　$\arctan\frac yx\in[-\frac\pi2,\frac\pi2]$.
$I=\int_0^1\int_\pi^{\frac54\pi}(\varphi-\pi)\,r\,dr\,d\varphi$　$\arctan(\frac{y}{x})_{\ge0}=\varphi-\pi$.
$=\frac12\int_0^{\frac\pi4}\varphi\,d\varphi=\frac12\times\frac12\times(\frac\pi4)^2=\frac{\pi^2}{64}$.