例题

2022年4月9日 星期六 上午7:22

计算：在一层当中定常数，积完该层为一次。
Newton-Leibniz 公式计算时内部和上下限。
对称和倍数。
雅克比，上下限（尤其 θ）

一、二重积分

例. $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$，$D=[0,1]\times[0,1]$

例. $\iint_D x\cos xy\,dx\,dy$，$D=[0,\pi]\times[0,1]$.

例. $\iint_B x^2y^2\,dx\,dy$，B 由 $y=0, x=a, y=\frac{b}{a}x$ 围成.

例. $f(x,y)$ 连续，证明：
$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx$

例. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$，$D$ 由 $y=a\,(a>0)$，$y=3a$，$y=x$，$y=x+a$ 围成.

例. 求 $\int_1^2 y\,dy\int_y^2 \frac{\sin x}{x^2-1}\,dx$

例. 求 $x^2+y^2\le a^2$，$x^2+z^2\le a^2$ 相交的体积.

例. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy$
其中 $D:[a,b]\times[c,d]$.

例. 求 $\int_0^1 [\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\,dy]\,dx$.

例. 求 $\iint_{|x|+|y|\le 1} x^2y^2\,dx\,dy$

例. 求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的体积.

例. 求 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 与 $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$ 相交部分的体积.

例. 求 $\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$，$\iint_{\substack{-R\le x\le R\\-R\le y\le R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

例. $A=\iint_D e^{(\frac{x-y}{x+y})}\,dx\,dy$，$D: x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$.

✓例. 求 $I=\iint_D \frac{dx\,dy}{xy(\ln^2x+\ln^2y)}$，$D: x+y\ge 1$，$x^2+y^2\le 1$.

例. $|5x+6y|+|9x+11y|\le 1$ 表示的图形面积.

例. 求球 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 所截下的体积 V.

例. 求双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$，$a>0$ 所围的面积.

例. 求积分 $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$，D 由 $y^2=px, y^2=qx, x^2=ay, x^2=by$ 围成.

✓例. $I=\iint_D \arctan\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\,dx\,dy$，$D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

✓例. 求积分 $\iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$，其中 $D=\{(x,y)\mid e^x+e^y\ge 1, e^{2x}+e^{2y}\le 1\}$.

例. 求 $\iint_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\}$.

1. $(a,b)\ne(0,0)$ 时，证明：
$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy=2\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)\,dt$.

2. $D=\{(x,y)\mid x\ge 0, y\ge 0\}$. $\iint_D e^{-x^2-y^2-2xy\cos\alpha}\,dx\,dy$.

二、三重积分

例. $\iiint_D x^2ye^{xyz}\,dx\,dy\,dz$. $D=[0,1]^3$.

例. $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$，$V: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y+z\le 1$.

例. 计算 $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$，V 为由锥面 $R^2z^2=h^2(x^2+y^2)$ 及平面 $z=h$ 围成的锥体.

例. 计算 $\iiint (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$，$V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

例. 求 $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$. $V: x^2+y^2=2x, z=0, z=a$.

例. 求 $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2}$，$V: 0\le z\le h$，$x^2+y^2\le 4z$.

✓例. $I=\iiint_{[0,1]^3} \frac{du\,dv\,dw}{(1+u^2+v^2+w^2)^2}$

例. $I=\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$，$V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

例. $f(x,y)$ 连续，证明：
$\left(\int_a^b dx\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)^2\right)^{\frac12}\le\left(\int_c^d dy\left(\int_a^b f^2(x,y)\,dy\right)\right)^{\frac12}$.

例. 求椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{5}=1$ 在 $(\sqrt{3},\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{5}{3}\sqrt{3})$ 的切平面. 设 V 由切平面与三个坐标面围成，求 $\iiint_V (x\sqrt{3}-\frac{y}{3}-\frac{z}{5})\,dx\,dy\,dz$.

例. 计算 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$，其中 V 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 构成.

例. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ 围成体积.

例. 计算曲面 $(\frac{x}{a})^{\frac23}+(\frac{y}{b})^{\frac23}+(\frac{z}{c})^{\frac23}=1$ 围成体积.

✓例. 已知 $V=\{(x,y,z)\mid x,y,z>0, x+y+z<1\}$.
计算 $A=\iiint_V \sin\frac{z}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$.

例. $F(t)=\iint_{[0,t]^2} f(x,y)\,dx\,dy$.
求证 (1) $F'(t)=\frac{2}{t}\left(F(t)+\iint_{[0,t]^2} xy\,f'(xy)\,dx\,dy\right)$.
(2) $F'(t)=\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\,ds$.

例. 证明：$\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\,dx\,dy=\int_0^1 t^t\,dt$.

三、n重积分

例. 求 n 维单形的体积.
$S_n(a)=\{(x_1,\cdots x_n)\mid x_1,\cdots x_n\ge 0, x_1+\cdots+x_n\le a\}$.

例. 求 n 维球的体积.
$B_n(a)=\{(x_1,\cdots x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2\le a^2\}$.