期中复习题

2022年5月10日 星期二　　上午10:31

1. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{2022}$

$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

$3 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \times (-2) = -2\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$4 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(-8) = -8\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

$2022 \div 3 = 674$

1	-2	-8	1
-8	16	64	2

$8^{674}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 8^{674} & 0 \\ 0 & 8^{674} \end{pmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \; 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \; 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\,2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3\Delta_{n-1} + (-1)^{2+1} \times 2\Delta_{n-2} = \Delta_n$

$\Delta_1 = 3$. $\Delta_2 = 9-2 = 7$

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

$a_n - k a_{n-1} = (3-k)a_{n-1} - 2a_{n-2}$　　$\frac{1}{k} = \frac{3-k}{2}$

$2 = 3k - k^2$. $k^2 - 3k + 2 = 0$. $k = 1$, $k = 2$.

$\therefore a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$　或 $a_n - 2a_{n-1} = a_{n-1} - 2a_{n-2}$.

$= 2^{n-2}(a_2 - a_1) = 2^{n+1}$.　　$= a_2 - 2a_1 = 1$.　$n \geq 3$

$a_n = (n-2)2^{n+1} + a_2$　　$n \geq 3$.　　$a_n + \lambda = 2(a_{n-1} + \lambda)$

$= (n-2)2^{n+1} + 7$　　$a_n = 2a_{n-1} + \lambda$, $\lambda = 1$.

$a_n + 1 = 2^{n-2}(a_2 + 1) = 2^{n+1}$

$\Delta = 2^{n+1} - 1$.　　$a_n = 2^{n+1} - 1$ ✓

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i I^{k-i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^i = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^i$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$(k \geq 3)$

$\therefore A^k = C_k^0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + C_k^1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + C_k^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & k & -\frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\det(A)$　　A^{-1}.

$= \begin{vmatrix} I_n & I_n & 0 \\ I_n & 0 & I_n \\ 0 & I_n & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & -I_n & I_n \\ 0 & I_n & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & -I_n & I_n \\ 0 & 0 & 2I_n \end{vmatrix}$

$= 1^n \times (-1)^n \times (2)^n = (-2)^n$.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} I_n & I_n & 0 & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & I_n & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & I_n & 0 & 0 & I_n \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_n & I_n & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & I_n & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n & -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & \frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n & -\frac{1}{2}I_n \\ 0 & I_n & 0 & \frac{1}{2}I_n & -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \\ 0 & 0 & I_n & -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \end{pmatrix}$

$AA^* = |A|I$

$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{(-2)^n}$

$= \frac{1}{(-2)^n \times 2}\begin{vmatrix} I_n & I_n & -I_n \\ I_n & -I_n & I_n \\ -I_n & I_n & I_n \end{vmatrix}$.

5. $A^* = A^T$. $a_{11} = a_{12} = a_{13}$

$AA^* = |A|I = AA^T = |A^T|I$.

$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \\ a & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = |A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a^3 + a^3 = |A|$

$2a^3 = 2b_1b_2b_3 = 2c_1c_2c_3 = |A|$

$a(b_1+b_2+b_3) = a(c_1+c_2+c_3) = 0$

$a(b_2c_3 + b_3c_1 + b_1c_2 - b_3c_2 - b_2c_1 - b_1c_3)$

$= a(b_2(c_1+c_2) - c_1(b_1+b_2) + b_1c_2 + (b_1+b_2)c_2$

$+ b_1(c_1+c_2) - b_2c_1)$

$= a(-3b_2c_1 + 3b_1c_2$

9. $XA = B$. $A_{n\times p}$. $B_{m\times p}$. $X_{m\times n}$ 唯一.

$A^T X^T = B^T$.　X^T 的各列为 $A^Tx = B^T$ 的解.

$p\times n$　$n\times m$　$p\times m$.

$p\times n$　$n\times 1$　$p\times 1$.　B^T 的各列是 A^T 列线性组合.