16～17春期中

2021年5月13日 星期四　　下午7:53

中国科学技术大学 2016—2017 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1.（6 分 × 6 = 36 分）填空题。

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

(6) [illegible]

2.（16 分）判断题（判断下列命题是否正确，并简要说明理由）。[illegible]

3.（12 分）[illegible]

4.（12 分）[illegible]

5.（16 分）[illegible]

6. 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的迹 $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=c$，已知 $\operatorname{rank} A=1$。

(1) 证明：$A^2=cA$；

(2) 计算 $\det(I+A)$，其中 I 为 n 阶单位方阵。

---

1. (1) 2 [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) 5^{n-1} [illegible] $|A^*|=|A|^{n-1}$ [illegible]

(4) 6

$$\begin{pmatrix}1&5&2&2\\0&3&1&-4\\0&0&-1&2\\1&5&2&3\end{pmatrix}$$

$(-1)(-3)-3\begin{vmatrix}1&5&2\\0&0&4\\1&5&2\end{vmatrix}+2(-1)\begin{vmatrix}1&5&2\\0&3&1\\1&5&2\end{vmatrix}-(-3)$

$=3-(-3)=6$

(5) $-\frac{2}{3}$.

$\mu_1(1,1,2)+\mu_2(1,2,-1)+\mu_3(1,-\lambda,3)=(3,9,6)$

$$\begin{cases}\mu_1+\mu_2+\mu_3=3\\ \mu_1+2\mu_2-\lambda\mu_3=9\\ 2\mu_1-\mu_2+3\mu_3=6\end{cases}\quad \begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&2&-\lambda&9\\2&-1&3&6\end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&-\lambda-1&6\\0&-3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&-3&1&3\\0&1&-\lambda-1&6\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&-3&1&3\\0&0&-\lambda-1+\frac{1}{3}&7\end{pmatrix}$ 无解. $-\lambda-\frac{2}{3}=0$.

(6) $\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\C^{-1}&0\end{pmatrix}$

$(A^T)^{-1}=\begin{pmatrix}0&C\\B&0\end{pmatrix}^{-1}$

$\begin{pmatrix}0&C&I&0\\B&0&0&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B&0&0&I\\0&C&I&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}BB^{-1}&0&0&IB^{-1}\\0&CC^{-1}&IC^{-1}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&0&0&B^{-1}\\0&I&C^{-1}&0\end{pmatrix}$

2. (1) 错误.

$A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&5&-2\\5&11&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-2\\2&3&-1\\5&11&-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&5&-2\\0&-7&3\\0&-14&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-2\\0&7&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$　rank $A=2$

$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\5&4&0\\3&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&14&0\\0&8&0\end{pmatrix}$　rank $B=2$.

(2) 正确.

$\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\vec{\alpha}_m=\vec{0}$.

$\begin{cases}\vec{\beta}_1=a_{11}\vec{\alpha}_1+\cdots+a_{1m}\vec{\alpha}_m=\sum_{i=1}^{m}a_{1i}\vec{\alpha}_i\\ \vdots\\ \vec{\beta}_l=a_{l1}\vec{\alpha}_1+\cdots+a_{lm}\vec{\alpha}_m\end{cases}$

$\mu_1\vec{\beta}_1+\cdots+\mu_l\vec{\beta}_l=\sum_{j=1}^{l}\mu_j\vec{\beta}_j$

$=\sum_{j=1}^{l}\mu_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\vec{\alpha}_i$

$=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\mu_j a_{ij}\vec{\alpha}_i$，⇒ 的系数.

$\mu_j a_{ij}$ 有非零的.

$a_{ij}\neq0$，μ_j 有非零的. 相关.

$a_{ij}=0$，$\vec{\beta}_j=\vec{0}$，相关.

(3) 错误.

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

rank AB = rank $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=1$

rank BA = rank $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ = rank $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$

(4) 正确.

假设相关. $\alpha_1\cdots\alpha_r$ → $\alpha_1\cdots\alpha_m$ ($m<r$).

则 $\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m$ 可表示 $\vec{\alpha}_1\sim\vec{\alpha}_s$，则秩为 m. 又 $\because\alpha_1\cdots\alpha_r$ 无关. 矛盾.

3.
$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4&2\\3&8&-1&2&0\\2&5&-2&1&a\end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix}1&2&-3&4&2\\0&2&8&-10&-6\\0&1&4&-7&a-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&2&-3&4&2\\0&1&4&-5&-3\\0&0&0&0&a+\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

有解 ⇒ $a=-\frac{1}{5}$.

$x_4=t_1$，$x_3=t_2$，$x_2=-3+5t_1-4t_2$

$x_1=2-4t_1+3t_2-2(-3+5t_1-4t_2)$

$=2-4t_1+3t_2+6-10t_1+8t_2$

通解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\5\\0\\1\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}11\\-4\\1\\0\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}8\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$

4.
$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\-1&1&1&\cdots&1&1\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&1&1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\-2&0&0&\cdots&0&0\\0&-2&0&\cdots&0&0\\\vdots&&\ddots&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-2&0\end{vmatrix}$$

$=1\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-2&&\\&\ddots&\\&&-2\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

$=(-1)^{n+1}(-2)^{n-1}=2^{n-1}$.

$\left(\begin{array}{cccccc|cccc}1&1&1&\cdots&1&1&1&&&\\-1&1&1&\cdots&1&1&&1&&\\-1&-1&1&\cdots&1&1&&&1&\\\vdots&&&\ddots&&\vdots&&&&\ddots\\-1&-1&-1&\cdots&-1&1&&&&1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cccccc|cccc}1&1&1&\cdots&1&1&1&&&\\-2&0&0&\cdots&0&0&-1&1&&\\0&-2&0&\cdots&0&0&&-1&1&\\\vdots&&\ddots&&&\vdots&&&\ddots&\\0&0&0&\cdots&-2&0&&&-1&1\end{array}\right)$

$\to\cdots\to$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&&\\&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\\&&\ddots&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

5. (1) rank V = 4. 即 4 个元素.

$\lambda_1+\lambda_2(x+1)+\lambda_3(x+1)^2+\lambda_4(x+1)^3=0$.

仅有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. 无关.

(2) $(1,\,x+1,\,(x+1)^2,\,(x+1)^3)$

$=(1,\,x,\,x^2,\,x^3)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$=(1,\,x,\,x^2,\,x^3)\,T^{-1}$.

$T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

(3) $5+7x-x^2+13x^3$

$=(1,\,x,\,x^2,\,x^3)\begin{pmatrix}5\\7\\-1\\13\end{pmatrix}$

$=(1,\,(x+1),\,(x+1)^2,\,(x+1)^3)\,T\begin{pmatrix}5\\7\\-1\\13\end{pmatrix}$

$=(1,\,(x+1),\,(x+1)^2,\,(x+1)^3)\begin{pmatrix}-16\\48\\-40\\13\end{pmatrix}$

坐标 $(-16\ \ 48\ \ -40\ \ 13)$

6. $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，rank $A=1$

(1) rank $A=1$，$A=\alpha\beta=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\cdots b_n)$

$a_{ii}=a_ib_i$，$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=c$.

$A^2=\alpha\beta\alpha\beta=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\cdots b_n)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\cdots b_n)$

$=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\,(b_1\cdots b_n)$

$=c\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\cdots b_n)=cA$.

(2) $\det(I+A)=\det(I+\alpha\beta)$

$=\det(1+\beta^T\alpha^T)=1+c$.