14～15春期中

2022年5月10日 星期二　　下午4:01

中国科学技术大学 2014—2015 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 ×5 = 20 分) 填空题.

(1) a, b 为 $\mathbb{R}^3$ 中向量, $|a| = \sqrt{3}, |b| = 1$, 数量积 $a \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 则以 $a + 2b$ 和 $a + b$ 为邻边的平行四边形的面积为 ____.

(2) 过点 $(1, -1, 1)$ 和 $(2, 0, -1)$, 且与 x 轴平行的平面方程为 ____.

(3) 令 $A = S_{ij}D_i(\lambda)T_{ij}(\lambda)$, 其中 $S_{ij}, D_i(\lambda), T_{ij}(\lambda)$ 是三种初等方阵. 则 $A^{-1} =$ ____.

(4) 若 A, B 为三阶可逆方阵, $|A| = \lambda, |B| = \mu, M = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ 2B & 0 \end{pmatrix}$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵. 则 $|M| =$ ____.

(5) 设 A 为 n 阶方阵, $|A| = \lambda$, A 的每行元素之和为 $\mu \neq 0$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 则 $A_{11} + A_{21} + ... + A_{n1} =$ ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题: 对的请简要说明理由, 错的请举出反例.

(1) 三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面, 则 $\boldsymbol{a}$ 能写出 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的线性组合.

(2) 若线性方程组变元的个数多于方程的个数, 则方程组一定有无穷组解.

(3) 两个 n 阶上三角方阵的乘积仍为上三角阵.

(4) 初等变换不会改变矩阵的秩.

3. (8 分) 直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使直线在坐标平面 Oxz 内?

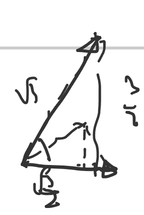
4. (8 分) 方阵 A 交换第 k, l 行得到 B, 则伴随矩阵 B^* 可由 A^* 经过怎样的初等变换得到?

5. (12 分) λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 有解时, 解出这个方程组.

6. (12 分) 设 A 是元素全为 1 的 n 阶方阵, $B = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$, 其中 $a_1a_2 \cdots a_n \neq 0$, 求 $A + B$ 的行列式与逆.

7. (10 分) A, B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times p$ 阶矩阵且 $A \cdot B = 0$. 求证: $\mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B \leq n$.

8. (10 分) $A \in F^{m\times n}$. 则 $\mathrm{rank}\, A = r \Leftrightarrow$ 存在列满秩的矩阵 $B \in F^{m\times r}$ 和行满秩的矩阵 $C \in F^{r\times n}$ 使得 $A = B \cdot C$(此事实称为矩阵的满秩分解定理).



1. (1) $3+\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　$\vec{b}=(1,0)$.　　$\vec{a}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$

$\vec{a}+2\vec{b}=(\frac{\sqrt{3}}{2}+2,\frac{3}{2})$　　$\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\vec{a}+\vec{b}=(\frac{\sqrt{3}}{2}+1,\frac{3}{2})$　　$S=\frac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$　　$3+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}[(\frac{\sqrt{3}}{2}+2)(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)+\frac{9}{4}]=\frac{1}{2}(\frac{12}{4}+3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$

(3) $T_{ji}(-\lambda)D_i(\frac{1}{\lambda})S_{ij}$

$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

(4) $-8\lambda^{n-1}\mu$

$|M|=\begin{vmatrix} 0 & A^* \\ 2B & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2B & 0 \\ 0 & A^* \end{vmatrix}=-|2B||A^*|$

$AA^*=|A|I$

$=-8|B||A|^{n-1}=-8\lambda^{n-1}\mu.$　　$|A||A^*|=|A|^n$

(5)