13～14期中

2022年4月21日 星期四　　下午12:59

中国科学技术大学 2013—2014 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 ×5 = 20 分) 填空题.

   (1) 已知 $A(1,2,3), B(2,2,2), C(1,5,9), D(2,1,4)$, 则四面体 $ABCD$ 的体积为 ____.

   (2) 经过点 $(1,2,3)$ 且垂直于两平面 $2x+y+2z+6=0$ 和 $x+2y+3z+5=0$ 的平面方程为 ____.

   (3) 当 $c=$ ____ 时, 两直线 $x=2y=2z$ 和 $x-c=\frac{y-3}{2}=z-2$ 相交.

   (4) 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*, 行列式 $\det A=2$, 则 $\det A^*=$ ____.

   (5) 已知 3 阶实方阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\4&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A=$ ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

   (1) 若空间三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$ 也不共面.

   (2) 对空间任意三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 必有 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}$.

   (3) 若齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解, 则非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}(x\neq 0)$ 必有无穷多组解.

   (4) 若 A,B 均为 n 阶方阵, 则 $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$.

3. (10 分) 若矩阵 A 经一次初等变换 (1, 2 或 3) 后得到矩阵 B; 那么, 相应地, A^T 能否由 B^T 经初等变换得到? 如果能, A^T 是由 B^T 经怎样的初等变换得到的?

4. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$, 求 $\det A$ 和 $A^k(k=0,\pm1,\pm2,...)$.

5. (15 分) 已知三张平面 $\Pi_1:\lambda x+y+z+1=0,\ \Pi_2:x+\lambda y+z+2=0,\ \Pi_3:x+y-2z+3=0, \lambda$ 为参数; 试就参数 λ 讨论其位置关系, 并作示意图.

6. (15 分) 求直线 $L_1:x-1=y=z$ 绕 $L_2:x=y=0$ 旋转一周所得旋转面的参数方程和一般方程, 指出此曲面的类型并作示意图.

7. (15 分) 试证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(2I_n-A)\geq n$, 且等号成立的充分必要条件是 $A^2=2A$.

8. (15 分) 试证明:

   (1) $\operatorname{rank}A^*=\begin{cases}n, \operatorname{rank}A=n\\1, \operatorname{rank}A=n-1\\0, \operatorname{rank}A\leq n-2\end{cases}$;

   (2) $(A^*)^*=(\det A)^{n-2}\cdot A\ (n\geq 2)$.

---

1. (1) $\vec{AB}=(1,0,-1)\quad \vec{AC}=(0,3,6)\quad \vec{AD}=(1,-1,1)$.

$V=\frac{1}{6}\vec{AB}\times\vec{AC}\cdot\vec{AD}$

$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&3&6\\1&-1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(3+3+6)=2.$

(2) $\vec{n_1}=(2,1,2).\quad \vec{n_2}=(1,2,3).$

$\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=(-1,-4,3)$

$-(x-1)-4(y-2)+3(z-3)=0.$

$-x-4y+3z=0.$

(3) $\begin{cases}x=t\\y=\frac{t}{2}\\z=\frac{t}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}x=v+c\\y=2v+3\\z=v+2\end{cases}\quad \begin{matrix}2=-1+c,\ c=3\\ w+3=v+2,\ v=-1\\ \frac{t}{2}=1,\ t=2\end{matrix}$

(4) $|A|=2.\quad AA^*=|A|I.$

$|A||A^*|=|A|^n,\quad \det(A^*)=|A|^{n-1}=2^{n-1}.$

(5) $AA^*=|A|I.$

$|A^*|=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\4&0&0\end{vmatrix}=4,\quad |A|^2=|A^*|,\ |A|=\pm2.$

$(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\4&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-4&-4\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{4}\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\4&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)$

$A=|A|(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&-2&0\\2&2&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\0&2&0\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

2. (1) 正确.

$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0},\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$

$\mu_1(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\mu_2(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})+\mu_3(\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c})=\vec{0}$

$(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\vec{a}+(\mu_1-\mu_2+2\mu_3)\vec{b}+(\mu_1+\mu_2+4\mu_3)\vec{c}=\vec{0}$

$\begin{cases}\mu_1+\mu_2+\mu_3=0\\\mu_1-\mu_2+2\mu_3=0\\\mu_1+\mu_2+4\mu_3=0.\end{cases}\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\0&0&4\end{pmatrix}$

$\mu_1=0,\ \mu_2=0,\ \mu_3=0.$ ∴ 也线性无关.

(2) 错误.

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{b}=\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$ 反

(3) 错误.

$A\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解. A 不可逆 / 行 < 列.

举反例. 矛盾方程.

$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}t$

$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 无解.

(4) 正确.

$AB\to(c_{ij})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$

$\det(AB)=\det\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}&\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2}&\cdots\\&&\\&&\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn}\end{pmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}&\cdots&a_{11}b_{1n}\\\Sigma&\Sigma&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&&\\\Sigma&\Sigma&\cdots&\Sigma\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\Sigma&\cdots\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\\Sigma&\Sigma&&\Sigma\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\Sigma&\Sigma&&\Sigma\end{vmatrix}(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})$

$=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\&&&\\b_{n1}&\cdots&&b_{nn}\end{vmatrix}\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\det B\det A.$

3. $AT=B.\quad T^TA^T=B^T.\quad A^T=(T^T)^{-1}B^T$

1: A 换行得 B. B^T 交换列得 A^T.

2: A 第 i 行 $\times\lambda$ 得 B. B^T 第 i 列 $\times\frac{1}{\lambda}$ 得 A^T

3: A $\lambda r_i\to r_j$ 得 B. B^T c_i 乘 $\to c_j$ 得 A^T.

4. $\det A=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}$

$=(-2)(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&-2\\0&0&-2\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&-2&-2\end{vmatrix}$

$=(-2)\times4+(-2)\times(-1)\times(-1)\times4=-16$

$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&2&-2&0\end{vmatrix}=$

$+\ B^T$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&1&1&1\\&&-1&-1\\&0&&-1\\&&&\end{pmatrix}$

$=I+B+B^T$

$A^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(I+B)^i(B^T)^{k-i}$

B 为上三角, 则 $B^iB^{Tj}=0$.

$A^k=B^{Tk}+(I+B)^k=B^{Tk}+\sum_{j=0}^{?-k}C_k^jB^j.$

5. 同上一题

6. 绕 z 轴.

7. $\begin{pmatrix}A&0\\0&2I_n-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&0\\A&2I_n-A\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}A-\frac{1}{2}A^2&0\\0&2I_n\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}A&A\\A&2I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A-\frac{1}{2}A^2&A-I_nA\\A&2I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-\frac{1}{2}A^2&0\\A&2I_n\end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&2I_n-A\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}2A-A^2&0\\0&2I_n\end{pmatrix}\geq\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0\\0&2I_n\end{pmatrix}=n.$

当 $2A=A^2$ 时取等.

$A^2=2A,\quad A^2-2A=0.\ A(A-2I)=0.$

$A=0$ 或 $A=2I$. $\operatorname{rk}A+\operatorname{rk}(2I_n-A)=n.$

8. (1) $\operatorname{rk}A=n.\quad A$ 可逆.

$AA^*=|A|I,\ A^*=|A|(A)^{-1}.\ \operatorname{rank}A^*=n.$

$\operatorname{rk}A<n.\quad A$ 不可逆.

$\operatorname{rk}A=n-1$, 存在 $(n-1)$ 阶不为零的子式.

∴ A^* 中存在一行中不为零的元素.

∴ $\operatorname{rk}A^*=1.$

$\operatorname{rk}A\leq n-2$, 不存在 $(n-1)$ 阶不为零的子式.

∴ 所有 $n-1$ 阶子式为零, A^* 元素为 0.

∴ $\operatorname{rk}A^*=0.$

(2) $AA^*=|A|I.$

$|A||A^*|=|A|^n.\quad |A^*|=|A|^{n-1}.$

$A^*(A^*)^*=|A^*|I=|A|^{n-1}I.$

A 可逆, $|A|\neq0$, $|A|A^{-1}(A^*)^*=|A|^{n-1}I$

∴ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A.$

A 不可逆, $\operatorname{rk}A=n-1$, $\operatorname{rk}A^*=1.$

$(A^*)^*=0=0A=|A|^{n-2}A.$

$\operatorname{rk}A\leq n-2,\ A^*=0,$

$(A^*)^*=0=0A=|A|^{n-2}A.$