# 12—13期中

2022年4月16日 星期六　　下午12:31



## 中国科学技术大学 2012—2013 学年第一学期
## 线性代数 (B1) 期中考试

1. (30 分) 填空题.

(1) 已知向量 $a=(1,-1,1)$, $b=(0,3,6)$, 则 $a\cdot b=$ <u>3</u>.

(2) $A(1,2,3)$, $B(2,1,4)$, $C(1,5,9)$, $D(2,2,2)$, 则 $\triangle ACD$ 的面积为 <u>$\frac{3}{2}\sqrt{6}$</u>, 四面体 $ABCD$ 的体积为 <u>2</u>.

(3) 两平面 $3x-4y+12z+25=0$ 和 $15x-20y+60z-5=0$ 之间的距离为 <u>24</u>.

(4) 以 $\begin{cases} x=5z \\ y=0 \end{cases}$ 为母线, 以 $Oz$ 轴为旋转轴的旋转面方程为 <u>$x^2+y^2=25z^2$</u>

(5) 经过点 $(1,2,3)$ 且垂直于平面 $x+2y+3z+5=0$ 和 $2x+y+2z+6=0$ 的平面方程为 <u>$x+4y-3z=0$</u>

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ <u>$-16$</u>

(7) 已知 3 阶实方阵 $A$ 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A=$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $c=$ <u>3</u> 时, 直线 $x-c=\dfrac{y-3}{2}=z-2$ 和 $x=2y=2z$ 相交.

(9) 设 $A=(a_{ij})_{4\times 4}$, 若 $a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{24}>0$, 且 $A^*=A^T$, 则 $a_{21}=$ ____.

2. (10 分) 若对可逆矩阵 $A$ 作下列初等变换后得到 (可逆) 矩阵 $B$, 那么相应地, $B^{-1}$ 是由 $A^{-1}$ 经怎样的变换得到的? 并说明理由.

(1) 互换 $A$ 的第 $i$ 列与第 $j$ 列. (2) 用非零数 $\lambda$ 乘 $A$ 的第 $i$ 列. (3) 将 $A$ 的第 $i$ 列 $\mu$ 倍加到第 $j$ 列上.

3. (12 分) 已知三张平面 $\Pi_1: \lambda x+y+z+1=0$, $\Pi_2: x+\lambda y+z+2=0$, $\Pi_3: x+y-2z+3=0$. 试就参数 $\lambda$ 讨论它们的位置关系, 并作示意图.

4. (12 分) 求直线 $\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \\ x+2y+4z-4=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$ 之间的距离 $d$.

5. (14 分) (1) 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵, $B$ 是 $n\times m$ 矩阵. $d_1=\det(I_m-AB)$, $r_1=\operatorname{rank}(I_m-AB)$, $d_2=\det(I_n-BA)$, $r_2=\operatorname{rank}(I_n-BA)$, $d=\begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix}$ 和 $r=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$. 求 $d$ 与 $d_1$ 和 $d_2$, 以及 $r$ 与 $r_1$ 和 $r_2$ 的关系.

(2) 求 $m+1$ 阶方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{pmatrix}$ 的行列式 $d_0$ 和秩 $r_0$.

6. (12 分) 试证明: 对于任意 $n$ 阶方阵 $A$ 均有 $\operatorname{rank}(I_n+A)+\operatorname{rank}(I_n-A)\geqslant n$, 且等号成立当且仅当 $A^2=I_n$.

7. (10 分) 设 $A$ 是行满秩的 $n\times(n+1)$ 矩阵, 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解为 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})^T$. 试证明: $x_i=(-1)^{n+i}cd_i$, 其中 $c$ 是任意常数, $d_i$ 是矩阵 $A$ 删去第 $i$ 列后得到的 $n$ 阶子矩阵的行列式, $i=1,\cdots,n+1$.

---

1. (1) $\vec a\cdot\vec b=3$.

(2) $\vec{AC}=(0,3,6)$, $\vec{AD}=(1,0,-1)$, $\vec{AB}=(1,-1,1)$

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$=\left|\frac{1}{2}(-3,6,-3)\right|=\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

$S_{四面体ABCD}=\frac{1}{6}\vec{AC}\times\vec{AD}\cdot\vec{AB}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$=\left|\frac{1}{6}(-9-3)\right|=2$.

(3) $3x-4y+12z+25=0$.

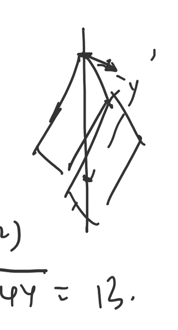
$3x-4y+12z-1=0$.

$=\left|\frac{26\times 12}{13}\right|=24$.

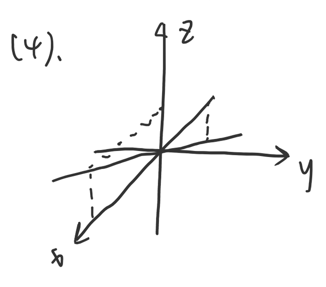
$\frac{26\cdot\vec n}{|\vec n|}$

$\vec n=(3,-4,12)$

$|\vec n|=\sqrt{9+16+144}=13$.



(4).





$(5,0,1)$. $r=5$.

$x^2+y^2=25$, $z=1$.

$25z^2=x^2+y^2$.

(5). $\vec n_1=(1,2,3)$. $\vec n_2=(2,1,2)$.

$\vec n=\vec n_1\times\vec n_2=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(1,4,-3)$.

$(x-1)+4(y-2)-3(z-3)=0$

$x+4y-3z=0$.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$=1\times(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}+2\times(-1)^8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$=-1\times 8+2\times(4-4-4)=-16$

(7) $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AA^*=|A|I$.

$A^*(A^*)^*=|A^*|I$.

$|A^*|=|A|^{n-1}$.

$(A^*)^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A^*|=4$. $|A|=\pm 2$;

$A=|A|\times(A^*)^{-1}$, $(A^*)^{-1}=\frac{(A^*)^*}{|A^*|}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $x=t+c$, $y=2t+3$. $z=t+2$

$x=t$, $y=\frac{1}{2}t$, $z=\frac{1}{2}t$.

$u+c=v$. $-1+c=2$, $c=3$.

$2u+3=\frac{1}{2}v$

$u+2=\frac{1}{2}v$ $\Rightarrow u+1=0$, $u=-1$, $v=2$.

(9) $\begin{pmatrix} a_{11} & a & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a & a & a & a \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$A_{12}=\begin{vmatrix} a & a_{23} & a_{24} \\ a & a_{33} & a_{43} \\ a & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}=-a=a\begin{vmatrix} 1 & a_{31} & a_{41} \\ 1 & a_{33} & a_{43} \\ 1 & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$

$A_{13}=\begin{vmatrix} a & a_{31} & a_{41} \\ a & a_{32} & a_{42} \\ a & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{31}$

初等矩阵

2. (1) $AS_{ij}=B$. $S_{ij}^{-1}A^{-1}=B^{-1}$, $S_{ij}A^{-1}=B^{-1}$.

交换第 $i$ 和 $j$ 行.

(2) $AD_i(\lambda)=B$ $D_i(\lambda)^{-1}A^{-1}=B^{-1}$. $D_i(\frac{1}{\lambda})A^{-1}=B^{-1}$.

第 $i$ 行乘 $\frac{1}{\lambda}$.

(3) $AT_{ij}(\lambda)=B$ $T_{ij}(\lambda)^{-1}A^{-1}=B^{-1}$. $T_{ji}(-\lambda)A^{-1}=B^{-1}$.

第 $j$ 行乘 $(-\lambda)$ 加到第 $i$ 行上.

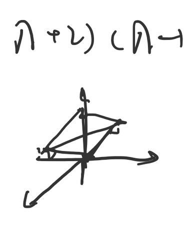
3. $\vec n_1=(\lambda,1,1)$. $\vec n_2=(1,\lambda,1)$ $\vec n_3=(1,1,-2)$

$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2\lambda^2+2-\lambda+2-\lambda=-2\lambda^2-2\lambda+4$

$=-2(\lambda^2+\lambda-2)=-2(\lambda+2)(\lambda-1)$

$\lambda=-2$ 时, $\vec n_1$、$\vec n_2$、$\vec n_3$ 共面.

$\Pi_1$、$\Pi_2$、$\Pi_3$



$\lambda=1$ 时, $\vec n_1$、$\vec n_2$ 平行. $\Pi_1$ $\Pi_2$ 平行, 与 $\Pi_3$ 相交

5. (1) $d=\begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n-BA \end{vmatrix}=\det(I_n-BA)=d_2$

$=\begin{vmatrix} I_m-AB & A \\ 0 & I_n \end{vmatrix}=\det(I_m-AB)=d_1$

$r=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\right)=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} I_m-AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$

$=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\right)=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n-BA \end{pmatrix}$

$\therefore r=r_1+n=r_2+m$ $d=d_1=d_2$

(2) 原矩阵 $=\begin{pmatrix} I_m & \alpha_{m\times 1} \\ \beta_{1\times m} & 1 \end{pmatrix}$

$d_0=\det(I_m-\alpha_{m\times 1}\times\beta_{1\times m})=\det(1-\beta_{1\times m}\times\alpha_{m\times 1})=1-\sum_{i=1}^{m}a_ib_i$

$r_0=m+\operatorname{rk}(1-\beta_{1\times m}\times\alpha_{m\times 1})=m+1$

6. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{pmatrix}$ $-A^2+A+I_n-A$

$\begin{pmatrix} I_n+A & 0 \\ A & I_n-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & A-I_n \\ A & I_n-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ A & -A^2+A+I_n-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & A-I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2=I_n$, $\operatorname{rk}(I_n+A)+\operatorname{rk}(I_n-A)=n$.

$A^2\neq I_n$ 时, $\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ A & I_n-A^2-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n-A^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n-A^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} I_n+A & 0 \\ A & I_n-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & A-I_n \\ A & I_n-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ A & I_n-A^2-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n-A^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n-A^2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rk}(I_n+A)+\operatorname{rk}(I_n-A)=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n-A^2 \end{pmatrix}\geqslant\operatorname{rk}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=n$.

7. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sum_{j=1}^{n+1}a_{ji}x_j=\vec 0$,