20～21秋期末

2022年6月25日 星期六　　下午4:12

中国科学技术大学 2020—2021 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 ×5 = 25 分) 填空题.

(1) 方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值是 ____.

(2) 3 阶实对称矩阵组成的集合恰有 ____ 个相合等价类.

(3) 实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2$ 的正惯性指数等于 ____.

(4) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任意的向量, 则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是 ____.

(5) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的线性变换: $\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\gamma)\gamma$, 其中 γ 是 V 中给定的单位向量, 则 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值为 ____.

2. (5 分 ×5 = 25 分) 判断题.

(1) n 维线性空间 V 中同一个线性变换在两组不同的基本下的矩阵彼此相合.

(2) 任何一个 n 阶实方阵都实相似于上三角矩阵.

(3) 每一个正交矩阵都正交相似于对角矩阵.

(4) 设 A,B 都是 n 阶实方阵, 若 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似.

(5) 设 A 是 n 阶实对称方阵, 若 A 的每一个顺序主子式都是非负的, 则 A 半正定.

3. (12 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1=(2,3,5)^T$, $\alpha_2=(0,1,2)^T$, $\alpha_3=(1,0,0)^T$ 变换为 $\beta_1=(1,2,0)^T$, $\beta_2=(2,4,-1)^T$, $\beta_3=(3,0,5)^T$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵; (2) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

4. (16 分) 设 V 是 3 维欧式空间, 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 给出的度量矩阵 $=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 请由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 按现在的顺序进行 Schmidt 正交化给出一组标准正交基.

5. (12 分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程是 $2x^2+6y^2+2z^2+8xz=1$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出这曲面的类型.

6. (10 分) 设 A,B 是两个 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB=BA$. 求证: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 P^TAP 与 P^TBP 都是对角矩阵.

1.(1) $\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 2$ ✓

$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)-3(\lambda-2)=(\lambda^2-3)(\lambda-2)$
$=(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})(\lambda-2)$

(2) 10 ✓

$\begin{pmatrix} 1&&\\&1&\\&&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&&\\&1&\\&&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&&\\&0&\\&&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&&\\&0&\\&&0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1&&\\&-1&\\&&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1&&\\&-1&\\&&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1&&\\&0&\\&&0 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1&&\\&1&\\&&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&&\\&-1&\\&&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&&\\&-1&\\&&0 \end{pmatrix}$

(3) 4 ✗ 3

$Q=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2$

$=\begin{pmatrix} 3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3 \end{pmatrix}$　$\begin{vmatrix} \lambda-3&1&1&1\\1&\lambda-3&1&1\\1&1&\lambda-3&1\\1&1&1&\lambda-3 \end{vmatrix}$　3, 9+1　27-1-1-9

$=(\lambda-3)^4-2+1+2-2(\lambda-3)^2=(\lambda-3)^4-2(\lambda-3)^2+1$

$=[(\lambda-3)^2-1]^2=[(\lambda-4)(\lambda-2)]^2$.　4 ~~4~~ 2　$\lambda(\lambda-4)^3$.

(4) $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$ ✓

$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\0\\x_3 \end{pmatrix}$, $\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

(5) -1 和 $(n-1)$ 个 1. ✓

$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\gamma)\gamma$.

$\mathscr{A}(\gamma)=\gamma-2(\gamma,\gamma)\gamma=\gamma-2\gamma=-\gamma$.

$\mathscr{A}(2\gamma)=2\gamma-2(2\gamma,\gamma)\gamma=2\gamma-4\gamma=-2\gamma$.

γ.　$\mathscr{A}(e_1\ldots e_n)=(\vec{e}_1-2(\vec{e}_1,\gamma)\gamma,\ldots\vec{e}_n-2(\vec{e}_n,\gamma)\gamma)$
$=(\vec{e}_1-2\vec{e}_1,\ldots\vec{e}_n-2(\vec{e}_n,\vec{e}_1)\vec{e}_1)$
$=(-\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n)$

2.(1) 错误 ✓

$A=(\vec{\alpha}_1\ldots\vec{\alpha}_n)$. $B=(\vec{\beta}_1\ldots\vec{\beta}_n)$, $B=AT$

$\mathscr{A}(A)=AX$　$\mathscr{A}(B)=BY$

$\mathscr{A}(B)=\mathscr{A}(AT)=\mathscr{A}(A)T=AXT=ATY$.

$\because XT=TY$, T可逆时, $Y=T^{-1}XT$, 相似.

当基为正交基时, $T^{-1}=T^T$, 相合.

(2) 正确. 错　定相似.

因n阶实方阵A都可以相似的多项式表示为..

(3) 正确. 错

$A^TA=I$, $A=(A^T)^{-1}I$, 特征值为1.

对 $A\vec{x}=\vec{x}$,

(4) 正确 ✓

$BA=A^{-1}ABA$, BA与AB相似.

(5) 错误

可能正定. $\begin{pmatrix} 0&0\\0&-1 \end{pmatrix}$

3. $\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

(1) $\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

$AT=B$, $T=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2&0&1\\3&1&0\\5&2&0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1&2&3\\2&4&0\\0&-1&5 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&1&1&&\\3&1&0&&1&\\5&2&0&&&1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5&2&0&&&1\\3&1&0&&1&\\2&0&1&1&& \end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1&0&0&&-2&1\\3&1&0&&1&\\2&0&1&1&& \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1&0&0&0&-2&1\\0&1&0&0&-5&3\\0&0&1&1&-4&2 \end{array}\right)$

$=\begin{pmatrix} 0&2&-1\\0&-5&3\\1&-4&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3\\2&4&0\\0&-1&5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4&9&-5\\-10&-23&15\\-7&-16&13 \end{pmatrix}$ ✓

(2) $\mathscr{A}(e_1\ e_2\ e_3)=(e_1\ e_2\ e_3)S$

$=\mathscr{A}(AA^{-1})=\mathscr{A}(A)A^{-1}$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$

$=(e_1\ e_2\ e_3)BA^{-1}$

$S=\begin{pmatrix} 1&2&3\\2&4&0\\0&-1&5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&2&-1\\0&-5&3\\1&-4&2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3&-20&11\\0&-16&10\\5&-15&7 \end{pmatrix}$ ✓

4. $|\alpha_1|=1$. $|\alpha_2|=\sqrt{10}$. $|\alpha_3|=\sqrt{2}$.

$(\alpha_1,\alpha_2)=0$ 正交. $\vec{\varepsilon}_1=\vec{\alpha}_1$

$\vec{\varepsilon}_2=\frac{\vec{\alpha}_2}{|\vec{\alpha}_2|}=\frac{\vec{\alpha}_2}{\sqrt{10}}$

$\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_3-(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\alpha}_3)\vec{\varepsilon}_1-(\vec{\varepsilon}_2,\vec{\alpha}_3)\vec{\varepsilon}_2$

$=\vec{\alpha}_3-(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3)\vec{\alpha}_1-\frac{1}{10}(\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)\vec{\alpha}_2$

$=\vec{\alpha}_3-\vec{\alpha}_1+\frac{2}{10}\vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}_3+\frac{1}{5}\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1$.

$|\vec{\beta}_3|=\sqrt{(\vec{\alpha}_3+\frac{1}{5}\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_3+\frac{1}{5}\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1)}$

$=\sqrt{2-\frac{1}{25}\times 10+1+\frac{2}{5}-\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\vec{\varepsilon}_3=\frac{\vec{\beta}_3}{\sqrt{3/5}}=\frac{\vec{\alpha}_3+\frac{1}{5}\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1}{\sqrt{3/5}}$

标准正交基 $\vec{\alpha}_1$, $\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\alpha}_2$, $\frac{1}{\sqrt{3/5}}(\vec{\alpha}_3+\frac{1}{5}\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1)$.

5. $\begin{pmatrix} 2&&4\\&6&\\4&&2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&6&0\\0&0&-6\\1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$　$A\to P^TAP=\Lambda$　I　P

✗ 正交变换

$2x^2+6y^2+2z^2+8xz$　$x=\tilde{x}-2\tilde{z}$
$=2\tilde{x}^2+6\tilde{y}^2-6\tilde{z}^2=1$,　$y=\tilde{y}$
　$z=\tilde{z}$

单叶双曲面.

6. A, B 都是n阶实对称, A, B都可正交对角化.

$\exists P_1$, $P_1^TAP_1=\Lambda_1$,　$\exists P_2$, $P_2^TBP_2=\Lambda_2$.

$AP_1=P_1\Lambda_1$,　$BP_2=P_2\Lambda_2$. 且 P_1, P_2 为正交阵.

A实对称, ∃正交 Q 使 $Q^TAQ=\begin{pmatrix} \lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow Q^TAQ=\begin{pmatrix} \lambda_1I_{r_1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_kI_{r_k} \end{pmatrix}$ 特征值重数

$AB=BA$, $(Q^TAQ)(Q^TBQ)=Q^TABQ=Q^TBAQ$
$=(Q^TBQ)(Q^TAQ)$.

Q^TBQ 对称. $\begin{pmatrix} B_{11}&\cdots&B_{1m}\\\vdots&&\vdots\\B_{m1}&\cdots&B_{mm} \end{pmatrix}$

$\Lambda B=B\Lambda$,　$\begin{pmatrix} \lambda_1B_{11}&\cdots&\lambda_1B_{1m}\\&&\\\lambda_mB_{m1}&\cdots&\lambda_mB_{mm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1B_{11}&\cdots&\lambda_mB_{1m}\\&&\\\lambda_1B_{m1}&\cdots&\lambda_mB_{mm} \end{pmatrix}$

$\therefore B=(B_{11}\ \cdots\ B_{mm})$.

$P_k^TB_{kk}P_k=\Lambda_k$, P 正交.

$P^T(Q^TBQ)P$ 对角. $P^T(Q^TAQ)P=Q^TAQ$ 对角.

取 $M=QP$.