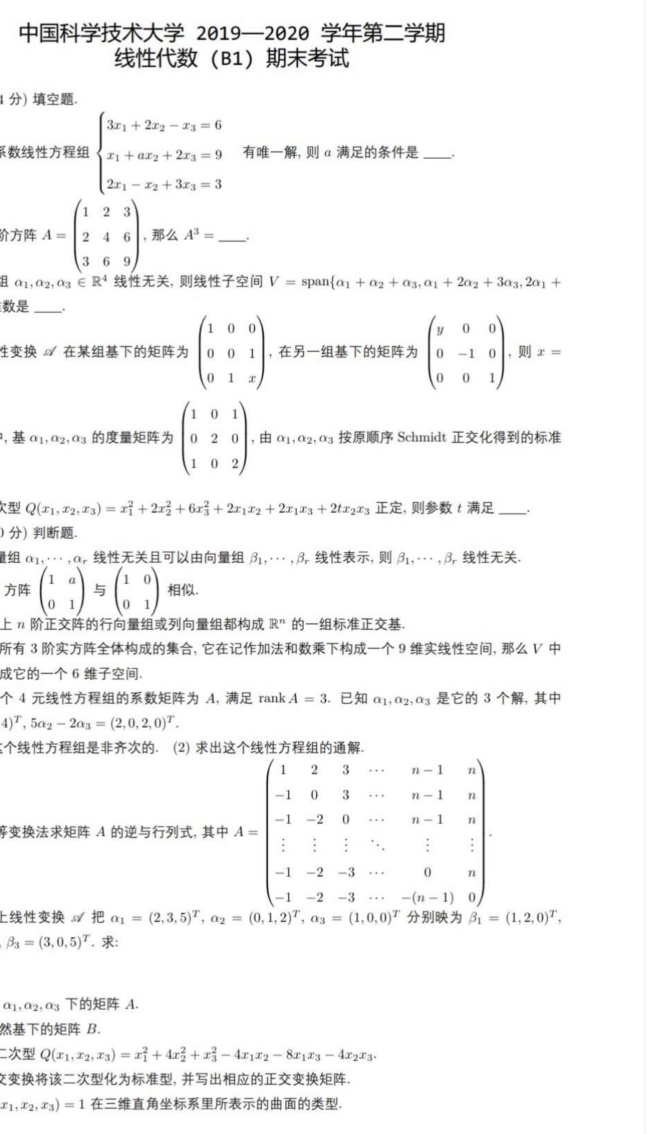
19～20春期末

2022年7月1日 星期五　　下午7:03



中国科学技术大学 2019—2020 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 ×6 = 24 分) 填空题.

(1) 已知实系数线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=6 \\ x_1+ax_2+2x_3=9 \\ 2x_1-x_2+3x_3=3 \end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是 ____.

(2) 已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$, 那么 $A^3=$ ____.

(3) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^4$ 线性无关, 则线性子空间 $V=\mathrm{span}\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\}$ 的维数是 ____.

(4) 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}y&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $x=$ ____, $y=$ ____.

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 按原顺序 Schmidt 正交化得到的标准正交基为 ____.

(6) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题.

(1) 已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关且可以由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表示, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

(2) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, 方阵 $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 相似.

(3) 数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

(4) 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在记作加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

3. (12 分) 设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A, 满足 $\mathrm{rank}\,A=3$. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\alpha_1=(1,-2,-3,4)^T$, $5\alpha_2-2\alpha_3=(2,0,2,0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐次的. (2) 求出这个线性方程组的通解.

4. (14 分) 用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\-1&0&3&\cdots&n-1&n\\-1&-2&0&\cdots&n-1&n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0&n\\-1&-2&-3&\cdots&-(n-1)&0\end{pmatrix}$.

5. (14 分) $\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\alpha_1=(2,3,5)^T$, $\alpha_2=(0,1,2)^T$, $\alpha_3=(1,0,0)^T$ 分别映为 $\beta_1=(1,2,0)^T$, $\beta_2=(2,4,-1)^T$, $\beta_3=(3,0,5)^T$. 求:

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2) $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵 B.

6. (16 分) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.