19～20秋期末

2022年6月25日 星期六　　下午4:10

中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 ×6 = 24 分) 填空题.

(1) 设三维向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$, 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 ____.

(2) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若 A 的特征值为 1,2,3,4, 则 $|B^{-1}-I|=$ ____.

(3) 已知矩阵 $\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似, 则 $a+b=$ ____.

(4) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$ ____.

(5) 设 $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&a&1\\5&0&3\end{pmatrix}$, 且 $\operatorname{rank}A=2$, 则 $a=$ ____.

(6) 设三阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $A^*=A^T$, 且 $a_{11}=a_{12}=a_{13}$, 则 $a_{11}=$ ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 是否相似? 是否相合?

(2) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, $AB=I_m$, 则 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$ 是否成立?

(3) $a_{ij}=\frac{i}{j}$, $i,j=1,\cdots,n$, 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^2$ 的符号差是否为 n?

(4) 设方阵 A 的每行元素之和都为 1, 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1?

3. (56 分) 计算及证明题.

(1) (8 分) 设 3 阶实对称正交方阵 A 非负定, $|A|=-1$, 且 $(1,1,1)^T$ 为 -1 的特征向量. 求 A.

(2) (8 分) 令 $A=\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\\frac12&1&-\frac12\\\frac12&\frac12&\frac12\end{pmatrix}$, $\alpha=(3,-1,2)^T$, 求 $\lim_{n\to\infty}|A^n\alpha|$.

(3) (8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n>1$, $\alpha\in V$. 设 $T^n\alpha=0$, 但是 $T^{n-1}\alpha\neq0$.

(a) 证明: 向量组 $\alpha,T\alpha,\cdots,T^{n-1}\alpha$ 线性无关. (b) 证明: T 不能对角化.

(4) (6 分) 设 $K=\{c_1+c_2x+c_3\cos x\mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成线性空间. 定义内积 $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 从 $1,x,\cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

(5) (8 分) 设 $A=\begin{pmatrix}10&1&2&3&3\\1&10&2&1&0\\2&2&10&3&x\\3&1&3&10&x\\3&0&x&x&10\end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x|<3$ 时, $|A|<10^5$.

(6) (8 分) 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型: $x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_3-10=0$.

(7) (10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(a) 证明: $1,x+2,x^2+x+3$ 是 K 的一个基.

(b) 求线性变换 $Tf:=f''-f$ 在这个基下的矩阵.

(c) 求 T 的特征向量.

1.(1) 0, 2

$\alpha^T\beta=2$. $(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=2$

$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(a_1\ a_2\ a_3)=$ a_1b_1 a_2b_2 a_3b_3

$\lambda I-\beta\alpha^T=$ $\lambda-a_1b_1$ $\lambda-a_2b_2$ $\lambda-a_3b_3$

$\beta\alpha^T\vec{x}=\lambda\vec{x}$

A与A^T相似.
$A=\beta\alpha^T$
$\beta\alpha^T$秩为1.
$\operatorname{tr}\beta\alpha^T=2$.

$|\lambda I-\beta\alpha^T|$
$=\lambda^{3-1}(\lambda-\alpha^T\beta)$
$=\lambda^2(\lambda-2)$

(2) 0

$B=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac12&&\\&&\frac13&\\&&&\frac14\end{pmatrix}$ 0 $-\frac12$ $-\frac23$ $-\frac34$

(3) -2

$\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-a&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-a)(\lambda-1)-(\lambda+2)\times2$
$=(\lambda+2)(\lambda^2-(a+1)\lambda+a-2)$

$b=-2$. $(\lambda+1)(\lambda-2)=\lambda^2-\lambda-2$ $a=0$

(4) $\begin{pmatrix}1&&-2\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&1&&-2\\&1&&&1&\\&&1&&&1\end{array}\right)$

(5) 6

$\begin{vmatrix}\lambda-2&3&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-5&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-a)(\lambda-3)+15-5(\lambda-a)+3(\lambda-3)$
$=(\lambda-2)(\lambda-a)(\lambda-3)-2\lambda+5a+6$

$\lambda=0$, $-2\times a\times3+5a+6=-a+6=0$.

(6) $\frac{\sqrt3}{3}$ 或 0

$|A|=0$.

$A^*=A^T$, (A可逆). $AA^*=|A|I$, $AA^T=|A|I$.

$\begin{pmatrix}a&a&a\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$ $AA^T=\begin{pmatrix}a&a&a\\\cdot&\cdot&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&&\\a&&\\a&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a^2&&\\&3a^2&\\&&3a^2\end{pmatrix}$

故. $|A|=3a^2$. $|\vec{\alpha}_2|^2=3a^2$. $|\vec{\alpha}_3|^2=3a^2$.

$|\alpha|=\sqrt3a$. $|A||A|=|A|^3$, $|A|=3a^2=1$

2.(1) 不相似. 相合

$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3+2-3(\lambda-2)$
$=(\lambda^2-4\lambda+4)(\lambda-2)+2-3(\lambda-2)$

$\lambda=0$, $(-2)^3+2+3\neq0$
$\lambda=1$, $(-1)^3+2+3\neq0$
$=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8+2-3\lambda+6$
$=\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=\lambda(\lambda-3)^2$.

(2) 成立.

$AB=I_m$, $m\le n$. $\operatorname{rank}A\le m$, $\operatorname{rank}B\le m$.

$P_1AQ_1=I_{r_1}$, $P_2BQ_2=I_{r_2}$.

$AB=P_1^{-1}I_{r_1}Q_1^{-1}P_2^{-1}I_{r_2}Q_2^{-1}=(P_1^{-1}Q_1^{-1})_{r_1}(P_2^{-1}Q_2^{-1})_{r_2}=I_m$

$r_1\ge m$, $r_2\ge m$. $\therefore r_1=r_2=m$.

$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=m$

(3) 否 符号差为1.

$f(x_1\cdots x_n)=\sum_{j=1}^n(\frac{j}{1}x_1+\frac{j}{2}x_2+\cdots+\frac{j}{n}x_n)^2$.

$=(x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n i^2&\sum_{i=1}^n\frac{i^2}{2}&\cdots&\sum_{i=1}^n\frac{i^2}{n}\\\sum_{i=1}^n\frac{i^2}{2}&\sum_{i=1}^n(\frac{i}{2})^2&&\\&&\ddots&\\&&&\sum_{i=1}^n(\frac{i}{n})^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$=x^TQx$, $Q=(q_{ij})_{n\times n}$. $q_{ij}=\frac{1}{i\times j}\sum_{k=1}^n k^2$.

$\therefore Q'=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13&\cdots&\frac1n\\\frac12&\frac14&&&\vdots\\\frac13&&\ddots&&\\\vdots&&&&\\\frac1n&\cdots&&&\frac{1}{n^2}\end{pmatrix}$

$\frac14-\frac14=0$

顺序主子式为0.

正惯性指数0.

$n=1$ 时成立.
$n>1$ 时不成立.
$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=x^TA^TAx$. $A=\frac{i}{j}$.
$\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}A=1$.
1, 0.

(4) 是.

$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(-1\ \ 2)$ $(-1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1$

$\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}^5=\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(-1\ \ 2)\right]^5=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(-1\ \ 2)$ 可以.

$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum a_{1i}\\\vdots\\\sum a_{ni}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

$A^5\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

3.(1) $|A|=-1$. $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ A的特征值1, 1, -1.

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ $P=P^T$.

$P=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

单位化

$=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&1&1\\1&-1&-3\end{pmatrix}$

$A=P\left(I+\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{pmatrix}\right)P^T=I+P\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{pmatrix}P^T$

$=I+\begin{pmatrix}0&&\frac{1}{\sqrt3}\\&&\frac{1}{\sqrt3}\\&&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&0&\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

$=I+\begin{pmatrix}0&0&-\frac{2}{\sqrt3}\\0&0&-\frac{2}{\sqrt3}\\0&0&-\frac{2}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&0&\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

$=I+\begin{pmatrix}-\frac23&-\frac23&-\frac23\\-\frac23&-\frac23&-\frac23\\-\frac23&-\frac23&-\frac23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac13&-\frac23&-\frac23\\-\frac23&\frac13&-\frac23\\-\frac23&-\frac23&\frac13\end{pmatrix}$

(2) $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-\frac12&0\\-\frac12&\lambda-1&\frac12\\-\frac12&-\frac12&\lambda-\frac12\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda-\frac12)+\frac18-\frac14(\lambda-\frac12)+\frac14(\lambda-1)$
$=(\lambda-1)^2(\lambda-\frac12)$

$\lambda=1$, $\begin{pmatrix}0&-\frac12&0\\-\frac12&0&\frac12\\-\frac12&-\frac12&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $(1,0,1)^T=\vec{x}_1$

$\lambda=\frac12$, $\begin{pmatrix}-\frac12&-\frac12&0\\-\frac12&-\frac12&\frac12\\-\frac12&-\frac12&0\end{pmatrix}$ $(1,-1,0)^T=\vec{x}_2$

$\alpha=(3,-1,2)^T$
$=2\vec{x}_1+\vec{x}_2$

$A^n\vec\alpha=A^n(2\vec{x}_1+\vec{x}_2)$
$=2A^n\vec{x}_1+A^n\vec{x}_2$
$=2\lambda_1^n\vec{x}_1+\lambda_2^n\vec{x}_2$
$=2\vec{x}_1+\frac{1}{2^n}\vec{x}_2$

$\lim_{n\to\infty}|A^n\alpha|=2\vec{x}_1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\vec{x}_2=2\vec{x}_1=(2,0,2)^T$.

(3) $\lambda_1\vec\alpha+\lambda_2T\vec\alpha+\cdots+\lambda_nT^{n-1}\vec\alpha=0$.
$\lambda_1T\vec\alpha+\lambda_2T^2\vec\alpha+\cdots+\lambda_nT^n\vec\alpha=0$
$\lambda_1T\vec\alpha+\cdots+\lambda_{n-1}T^{n-1}\vec\alpha=0$
$\lambda_1\vec\alpha+(\lambda_2-\lambda_1)T\vec\alpha+(\lambda_3-\lambda_2)T^2\vec\alpha+\cdots+(\lambda_n-\lambda_{n-1})T^{n-1}\vec\alpha=0$

(4).

(5) $|A|=10^5$

(6)

(7)(a) $\lambda_1 1+\lambda_2(x+2)+\lambda_3(x^2+x+3)=0$
$\lambda_3x^2+(\lambda_2+\lambda_3)x+\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0$ 无关.
$\dim K=3$.

(b) $Tf=f''-f$
$T(1,x+2,x^2+x+3)=(0,0,2)-(1,x+2,x^2+x+3)$
$=(-1,-x-2,-x^2-x-1)$
$=(1,x+2,x^2+x+3)\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$T=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(c) $|\lambda I-T|=\begin{vmatrix}\lambda+1&&2\\&\lambda+1&\\&&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$.

$\lambda=-1$, $\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{x}=(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$

$\therefore$ 特征向量 1, $x+2$.