18～19秋期末

2022年6月21日 星期二　　上午7:32

题.
内积.

① 例题.
　考试题 ②
① 习题
　作业题 ②
　书. ③
　考纲 ④
① 总结.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 ×6 = 24 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}^4 = $ ____.

(2) 向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3,4)$, $\alpha_3=(2,3,4,5)$, $\alpha_4=(1,-2,2,-1)$ 的秩等于 ____.

(3) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有无穷多解, 则 $\lambda=$ ____.

(4) 设 A,B 均为 n 阶矩阵, 且存在可逆矩阵 P, 使得 $B=P^{-1}AP-PAP^{-1}+I$. 如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 B 的 n 个特征值, 则 $\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i=$ ____.

(5) 实二次型 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 的正惯性指数为 ____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-2tx_1x_2-2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围为 ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题.

(1) 若 0 为矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(2) 若 f 为线性空间 V 上的一个线性变换, 且 f 在 V 的某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, 则在 V 中存在一组基, 使得 f 在这组基下的矩阵为对角阵.

(3) 设 $V=\{a_0+a_1x+a_2x^2\mid a_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 若对任意 $f(x),g(x)\in V$ 定义 $(f(x),g(x))=f(0)g(0)$, 则此二元运算 (,) 可以成为 V 上的一个内积.

(4) 设 $2n$ 阶实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}$, 其中 A_1,A_2 均为 n 阶方阵. 若 A 正定, 则 A_1+A_2 也正定.

3. (10 分) 设 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$, $\alpha_3=(0,1,1)^T$ 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解.

(1) 求 $Ax=0$ 的通解; (2) 求 $Ax=b$ 的通解; (3) 求满足题设条件的一个非齐次线性方程组.

4. (15 分) 设 (I): $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$; (II): $\beta_1=(-1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,1)^T$, $\beta_3=(2,-1,-2)^T$ 分别为 $\mathbb{R}^3$ 的两组基. 设 σ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 并且 $\sigma(\beta_1)=(1,0,-3)^T$, $\sigma(\beta_2)=(0,-1,-1)^T$, $\sigma(\beta_3)=(-5,-1,0)^T$. 请分别求出 σ 在 (I)、(II) 这两组基下的矩阵.

5. (15 分) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 可以经过正交变换 $(x_1,x_2,x_3)^T=P(y_1,y_2,y_3)$ 化为标准型 $y_2^2+2y_3^2$.

(1) 确定 a 和 b 的取值. (2) 求出满足题设条件的一个正交变换.

6. (8 分) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 且 $A^2=2A$. 证明: A 相似于对角阵.

7. (8 分) 设 A 为 n 阶正定矩阵, α_1,α_s 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个非零向量, 且满足 $\alpha_i^TA\alpha_j=0$, $1\leqslant i<j\leqslant s$. 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

1.(1) $\begin{pmatrix}8&0&8\\0&16&0\\8&0&8\end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$　$1-2^0$, $2-2^1$, $3-2^2$, $4-2^3$

(2) 3 ✓

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\\1&-2&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\0&-3&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&7&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(3) 1 ✓

$\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$　$\lambda=0$ $\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&-1&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$

rk = 3, 一个解, $-\frac12$ $\frac12$ $\frac12$

$\lambda\neq0$. $\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{pmatrix}$

$\lambda=1$. $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 无穷多.

$\lambda\neq1$. $\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&2-\lambda-\lambda^2&1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{pmatrix}$　$\lambda^2+\lambda-2$　$|A|=0$.

$-(\lambda-1)(\lambda+2)$　$(1-\lambda)(\lambda+1)$

A 半正定 $\Leftrightarrow$ $A=P^TP$.

$\Rightarrow$. A 半正定, 存在 Q 使 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&\ddots\end{pmatrix}$

$A=(Q^{-1})^T\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}Q^{-1}$

$P=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}Q^{-1}$. $A=P^TP$.

$\Leftarrow$ $A=P^TP$, $x^TP^TPx=(Px,Px)\geq0$. A 半正定.

(4) n ✓

$B=P^{-1}AP-PAP^{-1}+I$.

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $AP=P\Lambda$, $P^{-1}AP=\Lambda$.

$A=\Lambda$.　$PAP^{-1}=P\Lambda P^{-1}=A$.

此时. $P^{-1}AP-PAP^{-1}=0$. $B=I$.

(5). 1 ✓

$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-2\\0&-2&-3\\1&-2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-\frac53\\1&-2&\\0&1&\\0&0&\end{pmatrix}$　$-\frac23(-3)-2=0$, $-\frac23\times(-2)=\frac43$　用特征值.

(6) $-\sqrt2<t<\sqrt2$ ✓

$\begin{pmatrix}1&-t&-1\\-t&4&0\\-1&0&2\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{t\neq0}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4-t^2&-t\\0&-t&1\\1&t&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4-2t^2&0\\0&0&1\\1&2t&1\\0&1&0\\0&t&1\end{pmatrix}$

$4-2t^2>0$. $2-t^2>0$, $t\in(-\sqrt2,\sqrt2)$. $t\neq0$

$t=0$ $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&0\\-1&0&2\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ✓. 顺序主子式.

2. (1) 正确. 化为相似标准型后 对角元有零, 表明秩小于阶数.

(2) 错误. $\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$. 即 $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

此时 $\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $C(1,0)^T$.

错误　特征向量不够, 无法对角化.

(3) 正确. 线性性: $(\lambda f(x),g(x))=\lambda f(0)g(0)$.

$(f(x)+h(x),g(x))=(f(0)+h(0))g(0)$

$=(f(x),g(x))+(h(x),g(x))=f(0)g(0)+h(0)g(0)$

对称性 ✓.　$f(0)=a_0$, 与 x 无关.

正确　正定性: $(f(x),f(x))=f(0)^2\geq0$. $f(0)$ 可取 0.

(4) 错误

$\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}P_1^T&\\&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1&\\&I\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}P_1^TA_1&P_1^TB\\C&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1&\\&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1^TA_1P_1&P_1^TB\\CP_1&A_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}I_1&P_1^TB\\CP_1&A_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I&\\&P_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1&P_1^TB\\CP_1&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&\\&P_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}I_1&P_1^TBP_2\\P_2^TCP_1&P_2^TA_2P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1&P_1^TBP_2\\P_2^TCP_1&I_2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I&0\\-A_1^{-1}B&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-A_1^{-1}B\\0&I\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}I&0\\-A_1^{-1}B&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&0\\C&A_2-CA_1^{-1}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\C-B&A_2-CA_1^{-1}B\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}I&0\\-A_1^{-1}(C-B)&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&0\\C-B&A_2-CA_1^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-A_1^{-1}(C-B)\\0&I\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2-CA_1^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-A_1^{-1}(C-B)\\0&I\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-C+B&\\&A_2-CA_1^{-1}B\end{pmatrix}$

3. (1) $A\alpha_1=\vec b$, $A\alpha_2=\vec b$. $A\alpha_3=\vec b$

$\therefore A(\alpha_1-\alpha_2)=0$,　$A(\alpha_1-\alpha_3)=0$.

$\therefore A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}t_2$ 为通解.

(2) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 为通解.

(3) $A\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\vec b$, $A=(a_{ij})_{3\times3}=(\vec\beta_1,\vec\beta_2,\vec\beta_3)$

$A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec\beta_2=\vec\beta_3$, $\vec\beta_1=\vec\beta_3$, $\vec\beta_1=\vec\beta_2$.

$\therefore(\vec\beta_1,\vec\beta_1,\vec\beta_1)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

取 $\vec\beta_1=(1,1,1)^T$, 则 $\vec b=(2,2,2)$.

$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.　$x_1+x_2+x_3=2$ 即可.

4. $A=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

$\sigma(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=T\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}=TB=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=M$

则 σ 在 B 下的变换矩阵 $T=MB^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}^{-1}$

$\begin{pmatrix}-1&0&2&1&&\\0&1&-1&&1&\\1&1&-2&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&2&1&&\\0&1&-1&0&1&\\0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}-1&0&2&1&&\\0&1&-1&0&1&\\0&0&5&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&0&\frac35&\frac25&-\frac25\\0&1&0&\frac15&\frac45&\frac15\\0&0&5&1&-1&1\end{pmatrix}$

$T=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac35&-\frac25&\frac25\\\frac15&\frac45&\frac15\\\frac15&-\frac15&\frac15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac85&\frac35&-\frac35\\-\frac25&-\frac35&-\frac25\\\frac85&\frac25&-\frac75\end{pmatrix}$

$BB^{-1}=A$

$\sigma(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=SA$

$=\sigma(B^{-1}B)=SB^{-1}B$

$=B^{-1}\sigma(B)=B^{-1}TB$.

$\therefore SB^{-1}=B^{-1}T$, $S=B^{-1}TB=B^{-1}M$

$=\begin{pmatrix}-\frac35&-\frac25&\frac25\\\frac15&\frac45&\frac15\\\frac15&-\frac15&\frac15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac95&0&\frac{17}{5}\\-\frac25&-1&-\frac95\\-\frac25&0&-\frac45\end{pmatrix}$

5. $Q(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

特征值 0, 1, 2.

$=y^TP^TAPy=(y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$P^TAP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\\&P&\end{pmatrix}$

a, b ≠ 0 时.

$\to\begin{pmatrix}1-a^2&a&1-ab\\0&1&0\\1-ab&b&1-b^2\\1&0&0\\-a&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1-a^2&0&1-ab\\0&1&0\\1-ab&0&1-b^2\\1&0&0\\-a&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}$

$b^2\neq1$ 时,

$\to\begin{pmatrix}(1-ab)\frac{1-a^2}{1-b^2}&0&1-ab\\0&1&0\\0&0&1-b^2\\1&0&0\\-b\cdot\frac{1-ab}{1-b^2}&1&-b\\-\frac{1-ab}{1-b^2}&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-(1-ab)\frac{1-a^2}{1-b^2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1-b^2\\1&0&0\\b\frac{1-ab}{1-b^2}&1&-b\\-\frac{1-ab}{1-b^2}&0&1\end{pmatrix}$

取 $1-b^2=\frac12$, $b=\frac{\sqrt2}{2}$.　$\frac{\sqrt2}{2}$ $\frac{-1}{2}$

$-(1-ab)\frac{1-a^2}{1-b^2}=0$, $a=\sqrt2$.

$\therefore\begin{pmatrix}1&0&0\\-\sqrt2&1&\frac{\sqrt2}{2}\\2&0&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&\sqrt2&1\\\sqrt2&1&\frac{\sqrt2}{2}\\1&\frac{\sqrt2}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\sqrt2&1&\frac{\sqrt2}{2}\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&\frac12\end{pmatrix}$.

$\therefore\sqrt2\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\sqrt2&1&\frac{\sqrt2}{2}\\2&0&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&\sqrt2&1\\\sqrt2&1&\frac{\sqrt2}{2}\\1&\frac{\sqrt2}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\sqrt2&1&\frac{\sqrt2}{2}\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\sqrt2$

$=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$. $\therefore P=\begin{pmatrix}\sqrt2&0&0\\-2&1&\sqrt2\\2\sqrt2&\sqrt2&0\end{pmatrix}$.

6. $A\cdot A=2A$. A 的各列 $\alpha_1\sim\alpha_n$.

$A\alpha_1=2\alpha_1$, …… $A\alpha_n=2\alpha_n$.

2 为特征值, n 重.

$\therefore A=A^{-1}2A=2I$. 相似于对角阵 2I.

$rk(2I-A)+rk(A)\leq n$

且 $rk(2I-A)+rk(A)\geq rk(2I-A+A)=rk(2I)=n$.

$\therefore rk(A)+rk(2I-A)=n$.

$A^2=2A$,　$A^2=2A$. 特征值 0, 2.

$A=0$,　$A=2$ ……

$rk A=r$.　$rk(2I-A)=n-r$.

7. $P_1^TAP_1=I_n$.

$\alpha_i^TA\alpha_i>0$.

$\alpha_i^TA\alpha_j=0$.

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,

$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)^TA(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=0$

$k_1^2\alpha_1^TA\alpha_1+k_2^2\alpha_2^TA\alpha_2+\cdots+k_s^2\alpha_s^TA\alpha_s=0$

$k=0$.