期中复习

2021年11月25日 星期四　上午9:17

解线性方程组.

矩阵

- 定义 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.
- 概念
  - 方阵. 三角阵. 对角阵
  - 零矩阵. 基本矩阵
  - 对称矩阵
- 运算
  - 加法. 数乘.
  - 乘法. $A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$ ⇒ 取行/列算. (注意左右)
  - 转置. $(AB)^T=B^TA^T$. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.
  - 共轭.
  - 迹. $\mathrm{tr}(A)$ 对角元之和
  - 求逆. $A\cdot A^{-1}=I$. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- 初等变换.
  - 交换行/列 S_{ij}.
  - 行/列乘系数 $D_i(\lambda)$
  - 行/列乘系数加到另一行. $T_{ij}(\lambda)$
  - $T_{ij}A=B$. $A^TT_{ji}=B^T$ ⇒ $T_{ij}=T_{ji}^T$
- 分块矩阵
  - 计算. 加法. 乘法(分块乘法)
  - 初等变换
    - 交换行/列块.
      $\begin{pmatrix}0&I_{m_2}\\I_{m_1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{m_1n_1}&A_{m_1n_2}\\A_{m_2n_1}&A_{m_2n_2}\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}B_{m_1n_1}&B_{m_1n_2}\\B_{m_2n_1}&B_{m_2n_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&I_{n_1}\\I_{n_2}&0\end{pmatrix}$.
    - 行列块乘可逆方阵.
      $\begin{pmatrix}C I_{m_1}&0\\0&I_{m_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{m_1n_1}&A_{m_1n_2}\\A_{m_2n_1}&A_{m_2n_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}CA&CA\\ \cdot&\cdot\end{pmatrix}$
    - 行/列乘矩阵加到另一行/列.
      $\begin{pmatrix}I_{m_1}&0\\P I_{m_1}&I_{m_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\PA_{11}+A_{21}&PA_{12}+A_{22}\end{pmatrix}$
      $\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n_1}&0\\Q I_{n_1}&I_{n_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}QB_{12}+B_{11}&B_{12}\\QB_{22}+B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$
      $P_{m_2\times m_1}$, $Q_{n_1\times n_2}$.
    - 任意分块初等变换可以看作非分块初等变换的叠加.
- 秩和相抵
  - 定义: 矩阵经过行/列初等变换形成形式 $\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}$, 非零行数为秩. $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 即为相抵标准形.
  - 性质
    - $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^T)$
      $PAQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, $Q^TA^TP^T=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$
    - $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$
      $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}I_{r_1}&0\\0&I_{r_2}\end{pmatrix}=r_1+r_2$
    - $\mathrm{rank}(AB)\le\min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$. 分块.
- 综合
  - ① 分块矩阵求行列式
    $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\0&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&&\ddots&\\0&0&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$　$\det A=|A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{nn}|$.
    $\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}I_m&0\\-A^{-1}C&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$
    $=\det\begin{pmatrix}A&B\\C-A\times\frac{C}{A}&D-B\times\frac{C}{A}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A&B\\0&D-A^{-1}CB\end{pmatrix}$
    $=|A||D-A^{-1}CB|$
    $\det\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&-A\\0&I_n\end{pmatrix}$
    $=\det\begin{pmatrix}I_m&0\\B&I_n-BA\end{pmatrix}=|I_n-BA|$
    $=|I_m-AB|$
  - ② 用初等变换求逆
    $P_s\cdots P_2P_1A=I_n$, $PA=I_n$, $A^{-1}=P$.
    $A^{-1}(A\ \ I)=(I\ \ A^{-1})$, 即 $P(A\ \ I)=(I\ \ A^{-1})$
    $AQ_1Q_2\cdots Q_T=I_m$, $AQ=I_m$, $A^{-1}=Q$.
    $\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}I\\A^{-1}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}I\\A^{-1}\end{pmatrix}$.
  - ③ $A_{m\times n}\to\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, r 唯一确定.
    $A_{m\times n}\to I_r, I_s$　$r\ne s$.　$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$　$P_2AQ_2=\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}$
    $\therefore PI_rQ=I_s$.
    $\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}$.
    I_r 中取 s 行 T 列. $S=T\to\det=1$.

行列式

- 定义.
  - 代数: 计算工具 $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$
  - 几何: 二维→平四面积(叉乘). 三维→平行六面体体积
- 计算
  - 按行/列展开+代数余子式.
    $\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}$ (第 i 行).
    $=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M_{kj}$ (第 j 行).
    其中 A_{ij} 是去掉 a_{ij} 的行列式, 为代数余子式
    M_{ij} 是去掉 a_{ij} 的 $n-1$ 阶方阵, 为余子式.
  - 完全展开式.
    $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=\det(\alpha_1\cdots\alpha_n)$
    $=\det\left(\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}e_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}e_{j_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}e_{j_n}\right)$
    $=\sum_{j_1=1}^{n}\det\left(a_{1j_1}e_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}e_{j_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}e_{j_n}\right)$
    $=\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}\det\left(e_{j_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}e_{j_n}\right)$
    $=\cdots=\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_n})$
    $=\sum_{j_1j_2\cdots j_n\in S_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}$
- 性质
  - $\det(I)=1$.
  - 行交换, $A\xrightarrow{r_p\leftrightarrow r_q}B$, $|A|=-|B|$. (代数余子式)
  - 有两行/列同, $\det A=0$. (交换后相反)
  - $\begin{vmatrix}\lambda\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}\lambda\alpha_1\\\vdots\\\lambda\alpha_n\end{vmatrix}=\lambda^n\begin{vmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{vmatrix}$.
  - $\begin{vmatrix}\alpha_1\\\beta+\gamma\\\alpha_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1\\\beta\\\alpha_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_1\\\gamma\\\alpha_n\end{vmatrix}$.　$\begin{vmatrix}\alpha_1\\\lambda\alpha_i+\alpha_j\\\alpha_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1\\\alpha_j\\\alpha_n\end{vmatrix}$
  - $\det(A)=\det(A^T)$　(列出现于)
  - $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
    $AB=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\beta_k\\\vdots\\\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\beta_k\end{pmatrix}$
    $\det(AB)=\sum_{j_1\cdots j_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_n})$
    $=\det B\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau}(a_{1j_1}\cdots a_{nj_n})$
    $=\det(B)\det(A)$
- 应用
  - ① 可逆矩阵
    设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. $\det(A)\ne0$ ⇔ 可逆.
    $AA^*=\det(A)I$, $A^{-1}=\frac{A^*}{\det(A)}$ (计算).
  - ② Crammer 法则.
    $Ax=b$. $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$.
    $\det(A)\ne0$, 则 A 可逆,
    $x=A^{-1}b=\frac{A^*b}{\det A}=\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta}\\\vdots\\\frac{\Delta_n}{\Delta}\end{pmatrix}$
    其中 Δ_i 为将 A 的第 i 列换为 b 的行列式.
    $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&&&\vdots\\\vdots&&&\vdots\\A_{1n}&\cdots&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}A_{i1}b_i\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}A_{in}b_i\end{pmatrix}$.
  - ③ 行列式定义秩
    - 引理: $A_{m\times n}$. 若 A 的所有 k 阶子式为零, 且有 $PAQ=B$, 则 B 的所有 k 阶子式为零.
    - 定义: 秩为矩阵非零子式的最高阶数.
    - 性质
      ① $\mathrm{rank}(A\ \ B)\ge\mathrm{rank}(A)$
      ② $\mathrm{rank}(A\ \ B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$
      ③ $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\ge\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$
      ④ 线性方程组 $\begin{pmatrix}c_{11}&0&\cdots&0&d_1\\&c_{2j_2}&&&d_2\\&&\ddots&c_{rj_r}&d_r\\0&0&\cdots&0&d_{r+1}\end{pmatrix}$
      $d_{r+1}=0$, $\mathrm{rank}\,C=\mathrm{rank}(C\ d)$, 有解.
      $r=n$ - 唯一解, $r<n$ 无穷多组解.

线性空间

- 定义
  - n 维数组向量空间.
    F^n n 维. 对数乘, 加法封闭.
  - F^n 的子空间.
    $V\subseteq F^n$. 对数乘, 加法封闭
    平凡子空间, 非平凡子空间.
  - 生成子空间
    $\alpha_1\cdots\alpha_m\in F^n$. 线性组合.
  - 一般子空间
    非空集合 V 与数域 F
- 性质: 线性无关 —— 线性相关.
  - 定义
    - 向量: $\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\theta$, k_i 全为0.　k_i 不全为0.
      所有 α_i 不能用其他 α_i 表示.　存在 α_i 能用其他 α_i 表示.
    - 向量组: 所有 α 不能用 β 表示, 所有 β 不能用 α_i 表示.　存在 α 能用 β 表示. 存在 β 能用 α 表示.
    - 方程组: $\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_{1i}x_i=0\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}a_{mi}x_i=0\end{cases}$ 只有零解 (x_i)　$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_{1i}x_i=0\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}a_{mi}x_i=0\end{cases}$ 有非零解 (x_i).
    - 矩阵: $Ax=\theta$, $\mathrm{rank}A=m$　$Ax=\theta$, $\mathrm{rank}A<m$.
    - 行列式: $\det A\ne0$　$\det A=0$.
  - 定理.
    - F^n 中的 $n+1$ 个向量线性相关.
    - 若 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相关, 则 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 相关.
    - 若 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 和 $\beta_1\cdots\beta_t$ 满足 $s>t$, 且 $\alpha\cdots$ 可用 $\beta_1\cdots\beta_t$ 表示, 则 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性相关.
      $\alpha=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\beta_i$. 判断 α 的线性相关性, 用 $\sum_{j=1}^{s}k_j\alpha_j=\theta$ 的 k 的解情况.
      $\sum_{j=1}^{s}k_j\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\beta_i=\sum_{j=1}^{s}k_j\lambda_i\sum_{i=1}^{t}\beta_i=0$.
      α 可被表示, 则 β_i 都不为零,
      考虑系数 $\begin{cases}k_1\lambda_{11}+k_2\lambda_{12}+\cdots+k_s\lambda_{1s}=0\\\vdots\\k_1\lambda_{t1}+k_2\lambda_{t2}+\cdots+k_s\lambda_{ts}=0\end{cases}$
      $s>t$, k 有非零解.
- n 维数组向量空间: 极大无关组与秩.
  - 定义
  - 性质
    - 存在(取一个/全部).
    - 唯一(逆否) ⇒ α 用 β_j 表示, $\mathrm{rank}\,\alpha_i\le\mathrm{rank}\,\beta_j$. $\mathrm{rank}(\alpha_i+\beta_i)\le\mathrm{rank}(\alpha_i)+\mathrm{rank}(\beta_i)$. $\mathrm{rank}(AB)\le\min\{rA,rB\}$.
    - 等价(互相表示)
    - 行秩=列秩=秩 (初等变换)
    - 求极大无关组.
- 子空间: 基与维数.
  - 引理: 存在线性无关的向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 使 $V=\langle\alpha_1\cdots\alpha_r\rangle$. (取法+归纳)
  - 定义: 该组为基, r 为维数.
  - 性质
    - 基不唯一, 维数唯一.
    - 子空间 V 维数 $<n$. (逆否: $\dim V=n$, $V=F^n$)
    - 基等价 ⇒ 过渡矩阵.
      [基下的坐标变换]
- 应用: 解线性方程组.
  - $A\eta_1=b$, $A\eta_2=b$. $A(\eta_1-\eta_2)=\theta$. $\eta_1,\eta_2\in W$, $\eta_1-\eta_2\in V$. $A\eta_1=A(\eta_1-\eta_2)+A\eta_2$. 表示为 V 的解与 W 的解. 导出方程组 特解.
  - $Ax=b$ 解集 W.
    $b\ne0$. 有解 ⇔ $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A,b)$
    有唯一解 ⇔ $\mathrm{rank}A=n$.
    对解为向量组 $\eta_1\cdot\eta_2$.
    有 $A\eta_1=b$, $A\eta_2=b$, $A(\eta_1+\eta_2)=2b$
    $\eta_1+\eta_2$ 不为 $Ax=b$ 的解,
    即对加法不封闭, 故不是子空间.
  - $Ax=\theta$, 解空间 V.
    $b=0$, $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A,0)$, 必有解.
    $A(\eta_1-\eta_2)=\theta$, $A\lambda\eta=\theta$, 子空间→解空间.
    $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\\vdots\\a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\to\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&&0\\&c_{2j_2}&&0\\&&c_{rj_r}&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$
    $\mathrm{rank}A=r$.
    存在非零解, 则有 $r<n$.
    自由未知量个数 $n-r$.
    解空间维数为 $n-r$. (计算+表示)
    ⇒ 定义该解空间的一组基为基础解系.
    $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_r\\x_{r+1}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{r1}\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}t_1+\cdots+\begin{pmatrix}a_{1,n-r}\\\vdots\\a_{r,n-r}\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}t_{n-r}$　(x_{r+1} 取值)　(x_n 取值)

---

1. 三角阵相乘仍为三角阵.
   A_{nn}. B_{nn}. 满足: $a_{ij}=0=b_{ij}$, $i>j$.
   $C=AB=(c_{ij})_{n\times n}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{n\times n}$
   $i>j$. $k<i$, $a_{ik}=0$. $k\ge i$, $j<k$, $b_{kj}=0$　} $c_{ij}=0$
   $i\le j$. $c_{ij}=a_{ik}\cdot b_{kj}\ne0$
2. $\mathrm{rank}(AB)\le\min\{\mathrm{rank}A,\mathrm{rank}B\}$.
   $A=P_1I_rQ_1$. $B=P_2I_sQ_2$.
   $\mathrm{rank}A=r$. $\mathrm{rank}B=s$
   $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(P_1I_rQ_1P_2I_sQ_2)$
   $=r\left[P_1\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1P_2\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2\right]$
   $=r\left(P_1\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_{11}&T_{12}\\T_{21}&T_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2\right)$
   $=\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}T_{11}&T_{12}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\mathrm{rank}(T_{11})\le\min\{r,s\}$.
   $C=AB$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 行向量 $c_i=a_{i1}b_1+\cdots+a_{in}b_n$. c_i 可用 b 表示, $\mathrm{rank}(c_i)\le\mathrm{rank}\,b$. $\mathrm{rank}(AB)\le\mathrm{rank}(B)$, $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B^TA^T)\le\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}(A)$
3. $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 秩唯一确定.
   设 $A_{m\times n}\to\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}$, $r\ne s$.
   则有 $P_1\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1=P_2\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2$
   $\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{11}&0\\P_{21}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix}$
   $=\begin{pmatrix}P_{11}Q_{11}&P_{11}Q_{12}\\P_{21}Q_{11}&P_{21}Q_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}$　$P_{11}Q_{11}=I_s$.
   $\therefore\det(P_{11}Q_{11})=\det(I_s)=1$.
   但 $s\ne r$, $\det(P_{1\,s\times r}Q_{1\,r\times s})=0\ne1$. 矛盾. $s=r$.
4. 行列式可按任意一行/列展开.
   设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&0\\\vdots&\\a_{n1}&\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$
   按第 i 行: $|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$　(去掉 i, j 后)
   按第 k 行: $|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M_{kj}$.
   D_{ij} 为 M_{ij} 删除第 k 行第 i 列的余子式.
   $M_{ij}=\sum_{i=1}^{j-1}a_{ki}D_{ij}+\sum_{i=j+1}^{n}a_{ki}D_{ij}$.
   $M_{kj}=\sum_{i=1}^{j-1}a_{ji}D_{ij}+\sum_{i=j+1}^{n}a_{ii}D_{ij}$.
   ⇒ $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{ij}\left(\sum_{i=1}^{j-1}a_{ki}D_{ij}(-1)^{k+i}+\sum_{i=1}^{j-1}a_{ki}D_{ij}(-1)^{k+i}\right)$
   $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\left(\sum_{i=1}^{j-1}a_{1i}D_{ij}(-1)^{1+i}+\sum_{i=1}^{j-1}a_{1i}D_{ij}(-1)^{1+i}\right)$
   按第1行. $|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j}$
   按第1列. $|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$.
   N_{ij} 为去掉 M_{ij} 中的第 $i-1$ 行, 第1列.
   即去掉 A 中的 $1,i$ 行, $1,j$ 列.
   $M_{1j}=\sum_{k=2}^{j-1}a_{kj}N_{ij}+\sum_{k=j+1}^{n}a_{k}N_{ij}$.
   $M_{i1}=\sum_{k=2}^{i-1}a_{ik}N_{ij}+\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}N_{ij}$.
5. 完全展开式.
   $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1e_1\\\vdots\\\alpha_ne_n\end{vmatrix}=\det(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)$　(多项式).
   $=\det\left(\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}e_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}e_{j_2},\ldots\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}e_{j_n}\right)$
   $=\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}\det\left(e_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}e_{j_2},\ldots\right)$
   $=\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}\det(e_{j_1},\ldots e_{j_n})$
   $=\sum_{j_1\cdots j_n\in S_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}$
6. $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.
   $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$
   $AB=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}&\cdots&\\&\ddots&\\&&\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn}\end{pmatrix}$.
   $\det(AB)=\sum_{j_1\cdots j_n\in S_n}\sum_{k=1}^{n}a_{j_1k}b_{kj_1}\cdots\sum_{k=1}^{n}a_{j_nk}b_{kj_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}$
   $AB=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\beta_k\\\vdots\\\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\beta_k\end{pmatrix}$
   $\det(AB)=\sum_{j_1\cdots j_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_n})$.
   $=\det B\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau}(a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n})$
   $=\det B\det A$.
7. $AA^*=\det(A)I$.
   对 $A\cdot A^*$. $\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\\vdots&&\vdots\\A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$
   $a_{11}A_{11}=|A|$
   $a_{ij}A_{ij}=|A|$. $a_{ij}A_{ji}=0$. (有两列相同).
   所以 $a_{ij}A_{ij}$ ⇒ 对角阵.
8. Crammer.
   $\left(\begin{array}{ccc|c}a_{11}&\cdots&a_{1n}&b_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&b_n\end{array}\right)$　$\Delta=\det A$.　$\Delta_i=\det(A_{i\to b})$ (第 i 列换为 b)　$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta}\\\vdots\\\frac{\Delta_n}{\Delta}\end{pmatrix}$
   $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_i=b_i$　$Ax=b$, $x=A^{-1}b=\frac{A^*}{\det A}b=\frac{\Delta_i}{\Delta}$
9. 行列式定义秩
   引理: 若 $A_{m\times n}$ 的所有 k 阶子式为零, 且有 $PAQ=B$, 则 B 的所有 k 阶子式为零.
   $PAQ=B$. $A\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等}}B$.
   S_{ij}. 换行列 → 子式不变.
   $D_i(\lambda)$ 乘行 $\times\lambda$ → λ 子式, 子式 $=0$, λ 子式 $=0$
   $T_{ij}(\lambda)$. $\begin{vmatrix}\alpha_i\\\alpha_j+\lambda\alpha_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_i\\\alpha_j\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_i\\\lambda\alpha_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_i\\\alpha_j\end{vmatrix}$. 子式为0
   取到 i/j: 同样行, 为0
   取到 i 或 j: 与 i 无关为0
   定义: 矩阵最大不为零子式的阶数为秩.
   $PAQ=B=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$　$\mathrm{rank}(A)=r$.
   最大不为零子式为 s 阶.
   ① B 中 r 阶子式不为0, A 中也是, $\therefore s\ge r$.
   ② B 中 $r+1$ 阶子式为0, $s<r+1$. $s\le r$.
   $\therefore s=r$.
10. $Ax=\theta$, F^n. $\mathrm{rank}A=r$.
    则解空间维数为 $n-r$.
    $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$
    $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\\vdots\\a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\vdots\\a_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$
    $\therefore$ 解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\\x_{r+1}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\quad)t_1(x_{r+1})+(\quad)t_2+\cdots+(\quad)t_{n-r}(x_n)$
    $x_{r+1}\cdots x_n$ 线性无关. 构成一组基.
11. F^n 中 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 和 $\beta_1\cdots\beta_t$ 满足 $s>t$, 且 α 可用 β 表示, 则 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性相关.
    对 $\forall\alpha_i\ (1\le i\le s)$ 有 $\alpha_i=\sum_{j=1}^{t}k_j\beta_j$.
    α 是否线性相关 ⇔ $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\alpha_i=\theta$ 有非零解.
    $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\sum_{j=1}^{t}k_j\beta_j=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}k_j\lambda_i\beta_j=\theta$　($\beta_j\ne0$)
    对 $\forall\beta_j$. $\sum_{i=1}^{s}\lambda_ik_j=0$.　$\begin{cases}k_{11}\lambda_1+\cdots+k_{1s}\lambda_s=0\\\vdots\\k_{t1}\lambda_1+\cdots+k_{ts}\lambda_s=0\end{cases}$
    $s>t$, 方程组不唯一, 线性相关.