19～20期中

2021年12月1日 星期三　　下午12:55

中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (5 分 ×5 = 25 分) 填空题.

   (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank} A^T A =$ ____.

   (2) 设 A 为 5×8 矩阵, $\operatorname{rank} A = 3$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间的维数 = ____.

   (3) 设 $a \neq 0$, $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ ____.

   (4) 设 3 阶方阵 $A = (a, b, c)$, $B = (2b, c, 2a)$, 其中 a, b, c 为三维列向量, 若 $\det A = 1$, 则 $\det B =$ ____.

   (5) 设 A, B 为三阶可逆方阵, $\det A = \lambda$, $\det B = \mu$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\det M =$ ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题.

   (1) 二阶方阵与其伴随方阵的行列式相同.

   (2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A^T B^T)$.

   (3) 已知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 而 β 不是 $Ax = 0$ 的解, 则 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

   (4) 所有行列式为零的 n 阶方阵全体 W 是 $F^{n \times n}$ 的线性子空间.

3. (10 分) 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \ x_2 - x_3 = 3, \\ x_3 - x_4 = -2, \ x_1 - x_4 = 2 \end{cases}$.

4. (15 分) 计算 n 阶行列式 $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & & & \\ a & 1-a & -1 & & \\ & a & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1-a & -1 \\ & & & a & 1-a \end{vmatrix}$.

5. (20 分) 设 V 为实数域上所有 2 阶对称方阵组成的集合: $\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   (1) 证明: V 为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的线性子空间.

   (2) 证明: $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ 构成 V 的一组基.

   (3) 求基 S 到基 $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ 的过渡矩阵.

   (4) 求 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标.

6. (10 分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = 0$.

   (1) 证明: $\operatorname{rank} A \leqslant \frac{n}{2}$.

   (2) 对每一个 n, 找一个 n 阶方阵 A, 使得 $A^2 = 0$ 且 $\operatorname{rank} A = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

1. (1) $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 12 \\ 7 & 10 & 13 & 17 \\ 9 & 13 & 17 & 22 \\ 12 & 17 & 22 & 29 \end{pmatrix}$

$\det(A^TA) = 5\times10\times17\times29 + 9\times17\times9\times17$
$- 12^2\times13^2 + 81\times10\times29 + 17^3\times5 - 7^2\times22^2$
$= 10\times29(5\times17+81) + 17^2(81+17\times5)$
$-12^2\times13^2 - 7^2\times22^2 \neq 0.$　　$r=4.$

(2) $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{18} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{51} & \cdots & a_{58} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I_3 & \cdots \\ & \\ - & - \end{pmatrix}$　　$n=8$　解 = 5.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 2b_1 & c_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & c_2 & 2a_2 \\ 2b_3 & c_3 & 2a_3 \end{pmatrix} =$

$\det A = 2$.　$\det B = 4$

(5) $\det M = -|2A^*||B| = -\det(2A^*)\det B$
$= -2^3\det(A^*)\det B = -8(\det A)^{n-1}\det B = -8\lambda^2\mu.$

2. (1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$　　$ad-bc$　$ad+bc$.　✗

(2) $AB = C$.　$A^TB^T = (BA)^T$.　$\operatorname{rk}(AB) \neq \overset{\operatorname{rk}((BA)^T)}{\overset{\parallel}{\operatorname{rk}(BA)}}$

(3) $Ax=0$　$\begin{cases} a_{11}x_1 \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 - a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} t_1 + \cdots + \underset{\alpha_s}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} t_s$

行向向量.