16～17 春期中

2021年12月2日 星期四　　上午11:43

中国科学技术大学 2016—2017 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 ×6 = 24 分) 填空题.

(1) $\alpha_1=(1,3,2)^T, \alpha_2=(4,4,0)^T, \alpha_3=(2,5,3)^T, \alpha_4=(-1,2,3)^T$, 则 $\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ __2__.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&-1\\2&4&2\end{pmatrix}$, 则 $A^{10}=$ $\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&-1\\2&4&2\end{pmatrix}$.

(3) 设 A 为 n 阶方阵, $\det A=5$, A^* 为 A 的伴随方阵, 则 $\det A^*=$ __5^{n-1}__.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}1&5&2&-1\\0&3&1&-4\\0&0&-1&2\\1&5&2&3\end{pmatrix}$, A_{ij} 为代数余子式, 则 $A_{14}-3A_{24}+2A_{34}-A_{44}$ __6__.

(5) 若向量 $\beta=(3,9,6)$ 不能由向量组 $\alpha_1=(1,1,2), \alpha_2=(1,2,-1), \alpha_3=(1,-\lambda,3)$ 线性表示, 则 $\lambda=$ __$-\frac{2}{3}$__.

(6) 设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix}O&B\\C&O\end{pmatrix}$, 其中 B,C 为 n 阶可逆方阵, O 为零方阵, 则 $(A^T)^{-1}=$ $\begin{pmatrix}0&(B^T)^{-1}\\(C^T)^{-1}&0\end{pmatrix}$.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&5&-2\\5&11&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\5&0&4\\3&0&2\end{pmatrix}$, 则 A 与 B 不相抵. × rk A = rk B = 2

(2) 设数组空间 F^n 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关, $A\in F^{m\times 1}$, $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)A$, 则向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_l$ 也线性相关. × 取 $\alpha_1\neq 0$, 取 $A=(1,0,\ldots,0)^T$

(3) A,B 为 n 阶实方阵, 则 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(BA)$. ×

(4) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的秩为 r, 且任何向量 $\alpha_i(1\le i\le s)$ 均可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性表示, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组. √

3. (12 分) 当 α 取何值时, $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2\\3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1+5x_2-2x_3+x_4=a\end{cases}$ 有解? 求出它的通解.

4. (16 分) 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\-1&1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&1&1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&1\end{pmatrix}$, 求 $\det A$ 及 A^{-1}.

5. (16 分) 设 $\mathbb{P}_3[x]$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上次数不超过 3 的多项式全体, 按多项式的加法数乘构成线性空间.

(1) 证明: $S=\{1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3\}$ 构成 $\mathbb{P}_3[x]$ 上的一组基;

(2) 求基 S 到自然基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 的过渡矩阵 T;

(3) 求多项式 $5+7x-x^2+13^3$ 在基 S 下的坐标.

6. 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}, c=\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$, 已知 $\operatorname{rank}A=1$,

1\. (1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&4&2&-1\\3&4&5&2\\2&0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&2&-1\\0&-8&-1&5\\0&-8&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&2&-1\\0&-8&-1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ r行 = r列 = 2