19～20期末

2022年1月8日 星期六　　下午3:59

中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 ×6 = 24 分) 填空题.

(1) 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$, 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 ____.

(2) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若 A 的特征值为 1,2,3,4, 则 $|B^{-1} - I| =$ ____.

(3) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a + b =$ ____.

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $\operatorname{rank} A = 2$, 则 $a =$ ____.

(6) 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$, 则 $a_{11} =$ ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否相似? 是否相合?

(2) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, $AB = I_m$, 则 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ 是否成立?

(3) $a_{ij} = \frac{i}{j}$, $i, j = 1, \cdots, n$, 二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2$ 的符号差是否为 n?

(4) 设方阵 A 的每行元素之和都为 1, 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1?

3. (56 分) 计算及证明题.

(1) (8 分) 设 3 阶实对称正交方阵 A 非负定, $|A| = -1$, 且 $(1,1,1)^T$ 为 -1 的特征向量. 求 A.

(2) (8 分) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha = (3, -1, 2)^T$, 求 $\lim_{n\to\infty} |A^n\alpha|$.

(3) (8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n > 1$, $\alpha \in V$. 设 $T^n\alpha = 0$, 但是 $T^{n-1}\alpha \neq 0$.

(a) 证明: 向量组 $\alpha, T\alpha, \cdots, T^{n-1}\alpha$ 线性无关. (b) 证明: T 不能对角化.

(4) (6 分) 设 $K = \{c_1 + c_2x + c_3\cos x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成线性空间. 定义内积 $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 从 $1, x, \cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

(5) (8 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x| < 3$ 时, $|A| < 10^5$.

(6) (8 分) 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型: $x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3 - 10 = 0$.