18～19期末

2022年1月8日 星期六 下午3:58

中国科学技术大学 2018—2019 学年第一学期 线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 ×6 = 24 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}^4 =$ ____.

(2) 向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3,4)$, $\alpha_3=(2,3,4,5)$, $\alpha_4=(1,-2,2,-1)$ 的秩等于 ____.

(3) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有无穷多解, 则 $\lambda=$ ____.

(4) 设 A,B 均为 n 阶矩阵, 且存在可逆矩阵 P, 使得 $B=P^{-1}AP-PAP^{-1}+I$. 如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 B 的 n 个特征值, 则 $\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i=$ ____.

(5) 实二次型 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 的正惯性指数为 ____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-2tx_1x_2-2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围为 ____.

2. (5 分 ×4 = 20 分) 判断题.

(1) 若 0 为矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(2) 若 f 为线性空间 V 上的一个线性变换, 且 f 在 V 的某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, 则在 V 中存在一组基, 使得 f 在这组基下的矩阵为对角阵.

(3) 设 $V=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 若对任意 $f(x),g(x)\in V$ 定义 $(f(x),g(x))=f(0)g(0)$, 则此二元运算 (,) 可以成为 V 上的一个内积.

(4) 设 $2n$ 阶实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}$, 其中 A_1,A_2 均为 n 阶方阵. 若 A 正定, 则 A_1+A_2 也正定.

3. (10 分) 设 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$, $\alpha_3=(0,1,1)^T$ 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解.

(1) 求 $Ax=0$ 的通解; (2) 求 $Ax=b$ 的通解; (3) 求满足题设条件的一个非齐次线性方程组.

4. (15 分) 设 (I): $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$; (II): $\beta_1=(-1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,1)^T$, $\beta_3=(2,-1,-2)^T$ 分别为 $\mathbb{R}^3$ 的两组基. 设 σ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 并且 $\sigma(\beta_1)=(1,0,-3)^T$, $\sigma(\beta_2)=(0,-1,-1)^T$, $\sigma(\beta_3)=(-5,-1,0)^T$. 请分别求出 σ 在 (I)、(II) 这两组基下的矩阵.

5. (15 分) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 可以经过正交变换 $(x_1,x_2,x_3)^T=P(y_1,y_2,y_3)$ 化为标准型 $y_2^2+2y_3^2$.

(1) 确定 a 和 b 的取值. (2) 求出满足题设条件的一个正交变换.

6. (8 分) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 且 $A^2=2A$. 证明: A 相似于对角阵.

7. (8 分) 设 A 为 n 阶正定矩阵, α_1,α_s 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个非零向量, 且满足 $\alpha_i^TA\alpha_j=0$, $1\leqslant i<j\leqslant s$. 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

---

(1) 答: $\begin{pmatrix}8&0&8\\0&16&0\\8&0&8\end{pmatrix}$

正定性. $f(x)=0$, 取 多项式 …, 只需 $a_0=0$.

1.(1) $\begin{pmatrix}2^3&0&2^3\\0&2^4&0\\2^3&0&2^3\end{pmatrix}$

(2) rk = 3

(3) $\lambda^2+\lambda-2=0$, $(\lambda+2)(\lambda-1)=0$. -2.

$\therefore \lambda=1$ 或 -2

(4) $B=P^{-1}AP-PAP^{-1}+I$, $B-I=P^{-1}AP-PAP^{-1}$.

$P^{-1}AP=C$, $PCP^{-1}=A$.

$PAP^{-1}=PPCP^{-1}P^{-1}=(P)^2C(P^{-1})^2$

C为对角阵. $AP=\mu_C P$.

D为对角阵, $AP^{-1}=\mu_D P^{-1}$. $B-I=\mu_C I-\mu_D I$.

$B=(1+\mu_C-\mu_D)I$. $\lambda_B=1+\mu_C-\mu_D$.

$\lambda_B=\lambda_A$. $\lambda_A=\mu_C=\mu_D$. $\lambda=1+\mu-\mu$. n.

(5) 正惯性 = 1. (可直接用特征值) 相似于对角阵 (特征值), 初等变换 → 相合.

(6) 顺序主子式. $4-2t^2>0$, $2-t^2>0$, $t^2<2$. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

2.(1) $Ax=0x=\theta$. $A=0$. $x=\theta x$ 不可逆. ✓

(2) $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ 若存在 ⟹ A 相似于对角阵.

$p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)^2$.

$\lambda=2$. $x_2=0$, $x_1=t$. $(t,0)^T$. 不构成一组基. 不相似于对角阵. ×

(3) $(f,g)=(g,f)$. $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$. $(f,f)=f(0)\geq 0$. ×

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. 取 $a_0=0$, $a_1,a_2\neq 0$, $f(0)=0$

(4) $A=\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}$ 正定, $P^TAP=\begin{pmatrix}I_n&\\&I_n\end{pmatrix}=I_{2n}$

$A^T=A$. $A_1^T=A_1$, $A_2^T=A_2$. 各阶顺序主子式 > 0.

✓

3.(1) $A\alpha_1=b$, $A\alpha_2=b$, $A\alpha_3=b$.

$\therefore A(\alpha_1-\alpha_2)=\theta$, $A(\alpha_1-\alpha_3)=\theta$.

$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_1-\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 线性无关 为 $Ax=\theta$ 的特解.

$\therefore$ 通解为 $c_1(0,1,-1)^T+c_2(1,0,-1)^T$, $c_1,c_2\neq 0$.

(2) $Ax=b$ 一个特解为 $\alpha_1=(1,1,0)^T$.

$\therefore Ax=b$ 通解为 $c_1(0,1,-1)^T+c_2(1,0,-1)^T+(1,1,0)^T$.

(3) $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=b$, $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=b$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=b$.

则 有 $x_1+x_2+x_3=2$

4. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}$

A. $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T$. $T=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

B.

$\sigma(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)B$,

$\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}B$.

$\sigma(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\sigma((\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)T^{-1})$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)BT^{-1}$

$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)TBT^{-1}$

5.(1) 特征值为 0, 1, 2. $(y_2^2+2y_3^2)$

$\det A=0 \Rightarrow -(a-b)^2=0 \Rightarrow a=b=0$

$\det(A-I)=0 \Rightarrow 2ab=0$

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ $\lambda=0$, $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\lambda=1$, $x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\lambda=2$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

6. $A^2=2A$.

若 A 可逆, 则 A 的各列向量可构成一组基.

$A(\alpha_1\cdots\alpha_n)=2(\alpha_1\cdots\alpha_n)$.

即 $A^{-1}AA=2I$, A相似于对角阵 2I.

若 A 不可逆, 则 $\det A=0$, $\det A\det A=2\det A$.

$\lambda=0$ 为 A 的一个特征值.

…, 得 $AP=0P$, $P^{-1}AP=0I$, 相似于对角阵 0I.

7. $A=\begin{pmatrix}t_{11}&\cdots&t_{1n}\\\vdots&&\vdots\\t_{n1}&\cdots&t_{nn}\end{pmatrix}$, $\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$

$\alpha_i^TA\alpha_j=(a_{1i}\ a_{2i}\cdots a_{ni})\begin{pmatrix}t_{11}&\cdots&t_{1n}\\\vdots&&\vdots\\t_{n1}&\cdots&t_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$

$=\left(\sum_{k=1}^n t_{k1}a_{ki}\cdots\sum_{k=1}^n t_{kn}a_{ki}\right)\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$

$=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n t_{kl}a_{ki}a_{lj}=0$.

A正定, ∴ 对 $\forall k,l\in[1,n]$, $t_{kl}\neq 0$.

$\therefore \sum\sum a_{ki}a_{lj}=0$.

$\therefore (\alpha_i,\alpha_j)=0$, α_i,α_j 正交.

$\therefore \alpha_i,\alpha_j$ 线性无关.

根据 i, j 任意性, 得 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关.