16～17期末

2022年1月8日 星期六　　下午3:54

中国科学技术大学 2016—2017 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 ×5 = 20 分) 填空题.

(1) 若 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ 3x_1-4x_2+3x_3+x_4=t \end{cases}$ 有解, 则参数 $t =$ 5.

(2) 若向量 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(2,3,t)$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维子空间, 则参数 $t =$ 4.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 则 A 的相合规范型为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(4) 二次曲面方程 $2x^2-3y^2-3z^2-2yz-5=0$ 表示的曲面类型是 双叶双曲面.

(5) 实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+2txy+2txz+2yz$ 为正定当且仅当参数 t 满足 $-1<t<1$.

2. (5 分 ×5 = 25 分) 判断题.

(1) 设 A 是 n 阶方阵, 则 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^2$.

(2) 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定是奇异矩阵.

(3) 设 A 是 n 阶方阵, 若对任意 n 维列向量 x 都有 $x^TAx=0$, 则 A 为反对称方阵.

(4) 若 A,B 是 n 阶正定矩阵, 则 AB 也是 n 阶正定矩阵.

(5) 设 A 是 n 阶方阵, 则 A 是正交矩阵当且仅当 A 的 n 个行向量组成的 n 维实数组空间的标准正交基.

3. (14 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}(x,y,z)=(x+2y,x-3z,2y-z)$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,1)$ 下的表示矩阵.

(2) 是否存在基 β_1,β_2,β_3, 使得 $\mathscr{A}$ 在该基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

4. (14 分) 设 $V=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\}$ 为次数不超过 2 的实系数多项式构成的线性空间.

(1) 证明: $(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$ 定义了 V 上的一个内积.

(2) 应用 Schmidt 正交化方法将向量组 $\{1,x\}$ 改造成相对 (1) 中所定义内积的标准正交向量组.

5. (14 分) 设 M 是 $2n$ 阶方阵 $\begin{pmatrix}I&A\\A&I\end{pmatrix}$, 其中 A 是满足 $A^2=I$ 的 n 阶对称实方阵.

(1) 求矩阵 M 的所有特征值; (2) 可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}MP$ 为对角矩阵.

6. (8 分) 假设 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵. 证明: $\det A\cdot\det B\leqslant\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}AB\right)^n$.

1.(1) $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&1\\1&-1&1&1&2\\3&-6&3&1&t\end{array}\right)$　$t=5$.

$\to\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&1&0&2&1\\0&2&0&4&t-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&1&0&2&1\\0&0&0&0&t-5\end{pmatrix}$

(2) $t=4$.

(4) $=2x^2-3y^2-\frac{8}{3}z^2-5=0$ 单叶双曲面.

(5) $Q=x^2+y^2+3z^2+2txy+2txz+2yz$

正定. $1-t^2>0$　$t\in(-1,1)$.　$-1<t<1$.

2.(1) $\operatorname{rank} A=r\to PAQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A=P^{-1}I_rQ^{-1}$

$\operatorname{rank} A\cdot A\to\operatorname{rank} P^{-1}I_rQ^{-1}P^{-1}I_rQ^{-1}=r.$ ✗

奇异矩阵: 有非零解.

(2) 0 是 A 特征值. $(0-A)x=0$ 有解. $-Ax=0$ 有解, $Ax=0$ 有非零解. 是 ✓.

(3) $(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}x_ix_j=0$

$=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}x_ix_j$　$a_{ii}=0$　$a_{ij}=0$ 或 $a_{ij}=-a_{ji}$. ✓

(4) $A^TA=I$.　$B^TB=I$.　"正定"

$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TIB=B^TB=I.$ ✗

A 正定, $P^TAP=I_n$. B 正定, $Q^TBQ=I_n$. $AB=PI_nP^TQI_nQ^T=PP^TQQ^T$

(5) $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$　A 正交. $AA^T=I$. ✓

3.(1) $\mathscr{A}(x,y,z)=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&2\\0&-3&-1\end{pmatrix}$

$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}A$.

$\mathscr{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\x-3z\\2y-z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$

$\mathscr{A}\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　$\mathscr{A}\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

(2) $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}$ 线性相关, 无法构成.

4.(1) $(f,g)=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)=g(0)f(0)+g(1)f(1)+g(2)f(2)=(g,f)$.

$(f,f)=f(0)^2+f(1)^2+f(2)^2\geq0$, 当且仅当 $f=0$ 取 0.

(2) $\alpha_1=1$, $\alpha_2=x$.

$(\alpha_1,\alpha_1)=1\times1+1\times1+1\times1=3$, $e_1=\frac{1}{\sqrt3}$.

$\beta_2=\alpha_2-(e_1,\alpha_2)e_1=x-1$.

$(\beta_2,\beta_2)=(-1)\times(-1)+0\times0+(1\times1)=2$, $e_2=\frac{x-1}{\sqrt2}$.

∴ 标准正交向量组为 $\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{x-1}{\sqrt2}\right)$.

5.(1) $M=\begin{pmatrix}I&A\\A&I\end{pmatrix}$, $A^2=I$.

$p_M(\lambda)=\det(\lambda I-M)=\begin{vmatrix}(\lambda-1)I&-A\\-A&(\lambda-1)I\end{vmatrix}$

$=\det(\lambda-1)I\times\det(-[(\lambda-1)I]^{-1}+A)$

$=\lambda^n(\lambda-2)^n$

∴ 特征值 0, 2.

(2) $\lambda=0$, $(-A-I)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_{2n}\end{pmatrix}=\theta$;　$\lambda=2$, $(-I+A)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_{2n}\end{pmatrix}=\theta$.

$P=\begin{pmatrix}-Ae_1&-Ae_2&\cdots&-Ae_n&Ae_1&\cdots&Ae_n\\e_1&e_2&\cdots&e_n&e_1&\cdots&e_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A&A\\I&I\end{pmatrix}$.

6. $\det A\det B=\det AB$.

记 $C=AB$, 则 C 为 n 阶矩阵. 要证 $\det C\leq\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}C\right)^n$.

n=1 时, $\det C=c_1$, $\operatorname{tr}C=c_1$, ∴ $\det C=c_1\leq(1\times c_1)^1$.

n-1 时, 假设 $\det C_{n-1}\leq c_1\cdots c_{n-1}$ 成立.

n 时, $C_n=\begin{pmatrix}C_{n-1}&\alpha\\\alpha^T&c_{nn}\end{pmatrix}$ 正定.

$\det C_n=\begin{vmatrix}C_{n-1}&0\\\alpha^T&c_{nn}-\alpha^TC_{n-1}^{-1}\alpha\end{vmatrix}=\det C_{n-1}\times(c_{nn}-\alpha^TC_{n-1}^{-1}\alpha)$.

C_{n-1} 正定, ∴ C_{n-1}^{-1} 正定, $\alpha^TC_{n-1}^{-1}\alpha>0$, $c_{nn}>0$, ∴ $c_{nn}-\alpha^TC_{n-1}^{-1}\alpha>0$.

∴ $\det C_n\leq c_1\cdots c_{n-1}(c_{nn}-\alpha^TC_{n-1}^{-1}\alpha)\leq c_1\cdots c_{n-1}c_n$.

∴ $\det C_n\leq c_1\cdots c_n\leq\left(\frac{c_1+\cdots+c_n}{n}\right)^n=\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}C\right)^n$.