12～13春期末

2022年1月14日 星期五　　上午11:44

中国科学技术大学 2012—2013 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试 1

1. 填空题.

(1) $\mathbb{R}^2$ 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,-1),\alpha_2=(1,1)$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1=(2,0),\beta_2=(-1,1)$ 下矩阵为 ____.

(2) n 阶方阵 A 的行列式为 2, 且有特征值 λ, 则 $A^*+A^{-1}+A^2+2I^n$ 有特征值 ____.

(3) 设三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$(标准内积) 中向量 $(1,\lambda,\mu)$ 与向量 $(1,2,3)$ 和 $(1,-2,3)$ 都正交, 则 $\lambda=$ ____, $\mu=$ ____.

(4) 三元的实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_3^2+2x_1x_2-6x_2x_3$ 的标准型是 ____.

(5) 设 V 为 2 阶复方阵构成的复线性空间, $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}(M)=AM$. 那么 $\mathscr{A}$ 的特征值为 ____.

(6) 三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中从基 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,1,1)$ 到另一组基 $f_1=(1,1,1),f_2=(1,1,0),f_3=(0,1,2)$ 的过渡矩阵是 ____.

2. 判断下列命题是否正确, 并简要地给出理由.

(1) 若 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 则 $\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}O&B\\D&O\end{pmatrix}$ 相似.

(2) 设 A 为 n 阶方阵 A 的不同特征值, X_1,X_2 分别为属于 λ_1,λ_2 的特征向量, 则 X_1+X_2 一定不是 A 的特征向量.

(3) 设 A 为 2 阶实方阵, 若 A 的行列式 $|A|<0$, 则 A 可以相似对角化.

(4) 若 ϕ 是从 n 维实线性空间 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的同构, 则 $(u,v)=(\phi(u))^T\cdot(\phi(v))$ 定义了 V 上的一个内积.

(5) 设 A,B 都是 n 阶正定实方阵, 则 $A+B$ 也是正定的.

(6) 在三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中集合 $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|x_1+x_2+x_3=0,x_1-x_2+x_3=1\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间.

(7) 设 $\mathscr{S}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 并且对于任意 $\alpha\neq\beta\in V$ 都有 $\mathscr{S}(\alpha)\neq\mathscr{S}(\beta)$. 那么, 任给 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$; $\mathscr{S}(\alpha_1),\mathscr{S}(\alpha_2),...,\mathscr{S}(\alpha_n)$ 也是 V 的一组基.

3. 如果 $n\times n$ 矩阵 A 是正定的, 那么存在一个正定矩阵 B, 是的 $A=B^TB$.

4. 设 e_1,e_2,e_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 且 $\alpha_1=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3),\alpha_2=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3),\alpha_3=\frac{1}{3}(e_1-2e_2-2e_3)$,

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基;

(2) 求 e_1,e_2,e_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的正交变换的矩阵;

(3) 求 e_1,e_2,e_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标变换矩阵.

5. 设 $V=\{(a_2x^2+a_1x+a_0e^x:a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R})\}$, V 中元素按函数通常的数乘与加法构成的线性空间. 对任意 $f(x)\in V$, 定义 V 上的变换 : $\mathscr{A}:p(x)\to\frac{d}{dx}p(x)$, 对任意 $p(x)\in V$.

(1) 证明: $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 e^x,xe^x,x^2e^x 下的矩阵;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

6. 设 α 是 n 维欧氏空间 V 中的非零向量, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}_\alpha:\mathscr{A}_\alpha(\beta)=\beta-\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}\alpha$. 证明:

(1) $\mathscr{A}_\alpha$ 是一个正交变换;

(2) 存在标准正交基, 使得 $\mathscr{A}_\alpha$ 在该基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1,1,..,1)$.

7. 设 n 为大于 1 的整数, $\mathscr{S}$ 是数域 F 下 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且存在 $\alpha\in V$ 使得 $\mathscr{S}^{n-1}(\alpha)\neq0$, $\mathscr{S}^n(\alpha)=0$. 证明 $\mathscr{S}$ 在 V 的某组基下矩阵的 $(2,1),(3,2),...,(n,n-1)$ 位置元素全为 1, 其他位置元素全为零.

8. 问复数 λ 取何值时方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有唯一解, 有无穷多解或者无解? 并且在有无穷多解时求出通解.

1.(1) $\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)A$

$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2)=\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2)T=(\alpha_1,\alpha_2)AT$

$=(\beta_1,\beta_2)T^{-1}AT=(\beta_1,\beta_2)B.$

(2) $|A|=2.\quad \lambda I-A=\theta$

$AA^*=|A|I=2I,\quad |A||A^*|=|2I|=2^n|I|.\quad |A^*|=2^{n-1}.$

$\frac{\lambda}{2}AA^*-A=\theta,\quad A(\frac{\lambda}{2}A^*-I)=\theta$

$\Rightarrow \det(\frac{\lambda}{2}A^*-I)=\det(\frac{\lambda}{2}(A^*-\frac{2}{\lambda}I))=0,$

$\det(\lambda_0 I-(A^*+A^{-1}+A^2+2I^n))$

$\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\lambda^2+2$

(3) $1+2\lambda+3\mu=0.$ $1-2\lambda+3\mu=0$ $\Rightarrow$ $\lambda=0$, $\mu=-\frac{1}{3}$

(5) $\mathscr{A}(M)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}M\qquad A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

取基 $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $M_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\mathscr{A}M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\mathscr{A}M_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\mathscr{A}M_3=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathscr{A}M_4=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$.

$\mathscr{A}(M_1\ M_2\ M_3\ M_4)=1M_1+1M_2+2M_1+M_3+2M_2+M_4$

$=3M_1+3M_2+M_3+M_4.$

$=(M_1\ M_2\ M_3\ M_4)\begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix}$

$p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2.$

$\lambda=1.\ \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\theta.\quad x_2=0,\ x_1=c.\ (1,1,0)$

$\lambda=1.\quad (1,1,1,1)$

2.(1) $P^{-1}AP=B,\quad Q^{-1}CQ=D.\qquad Q^{-1}C\quad P^{-1}A$

$\begin{pmatrix}0&B\\D&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&P^{-1}AP\\Q^{-1}CQ&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&Q^{-1}\\P^{-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&A\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&Q\\P&0\end{pmatrix}$

$T=\begin{pmatrix}0&Q\\P&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&Q&I&0\\P&0&0&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P&0&&I\\0&Q&I&\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}I&0&0&P^{-1}\\0&I&Q^{-1}&0\end{pmatrix}.\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}0&P^{-1}\\Q^{-1}&0\end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix}0&P^{-1}\\Q^{-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&A\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&Q\\P&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^{-1}C&0\\0&Q^{-1}A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&Q\\P&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}P^{-1}CQ&0\\0&Q^{-1}AP\end{pmatrix}$

不相似. ×.

(2) $AX_1=\lambda_1X_1,\quad AX_2=\lambda_2X_2.$

$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2$ 假设是的,

$=\lambda(X_1+X_2)+(\lambda_1-\lambda)X_1+(\lambda_2-\lambda)X_2.$

则 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$. 又 $\lambda_1\neq\lambda_2$, ∴不满足. ∴无. √.

(3) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. $\det(A)=ad-bc<0.$

可相似 ⇒ ∃可逆T使 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}$.

$AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}T.$

$p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc$

可能λ一样! ×.

(4)

(5) $P^TAP=I.\quad Q^TBQ=I.$

$A+B=(P^{-1})^TP^{-1}+(Q^{-1})^TQ^{-1}\to P^TP+Q^TQ.$ 不一定.

(6) $(x_1\ x_2\ x_3).\to x_1+x_2+x_3=0.\quad x_1-x_2+x_3=1.$

$y_1+y_2+y_3=0.\quad y_1-y_2+y_3=1.$

则 $(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)$ 也为...

$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=2\neq1.$ 不是. ×

(7) $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n=\theta,\quad \lambda_1=\cdots=\lambda_n.$

$\mathscr{S}(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n)=\theta$

$=\mathscr{S}\lambda_1\alpha_1+\cdots+\mathscr{S}\lambda_n\alpha_n$

$=\lambda_1\mathscr{S}\alpha_1+\cdots+\lambda_n\mathscr{S}\alpha_n=\theta.$ √.

3. $n=1$, $A=(a_{11})$, $a_{11}>0$, $A=\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{11}}$, $B=(\sqrt{a_{11}})$ 成立 √.

$n=k-1$ 时成立, $A_{k-1}=B_{k-1}^TB_{k-1}$, $A_{k-1}>0$, $B_{k-1}>0$

$n=k$ 时, $A_k=\begin{pmatrix}A_{k-1}&C\\C^T&a_{kk}\end{pmatrix}$, $A_{k-1}>0$, $a_{kk}>0$.

$\to\begin{pmatrix}A_{k-1}&C-A_{k-1}A_{k-1}^{-1}C\\C^T&a_{kk}-C^TA_{k-1}^{-1}C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{k-1}&0\\C^T&a_{kk}-C^TA_{k-1}^{-1}C\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}I_{k-1}&0\\-A_{k-1}^{-1}C^T&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{k-1}&C\\C^T&a_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{k-1}&-A_{k-1}^{-1}C\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{k-1}&0\\0&a_{kk}-C^TA^{-1}C\end{pmatrix}$

不改变正定性, $a_{kk}-C^TA_{k-1}^{-1}C>0.$

$\begin{pmatrix}A_{k-1}&0\\0&a_{kk}-C^TA_{k-1}^{-1}C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{k-1}^TB_{k-1}&0\\0&a_{kk}-C^TA_{k-1}^{-1}C\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}B_{k-1}^T&\\&\sqrt{\cdots}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{k-1}&\\&\sqrt{\cdots}\end{pmatrix}$

∴取 $B_k=\begin{pmatrix}I_{k-1}&0\\-A_{k-1}C^{T-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{k-1}&\\&\sqrt{\cdots}\end{pmatrix}$.

使 $\begin{pmatrix}A_{k-1}&C\\C^T&a_{kk}\end{pmatrix}=B_k^TB_k.$ 得证.

6. $\mathscr{A}_\alpha(\beta)=\beta-\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}\alpha.$

(1) $(\mathscr{A}_\alpha(\beta),\mathscr{A}_\alpha(\alpha))=(\beta-\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}\alpha,\ \alpha-\dfrac{2(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)$

$=(\beta,\alpha-\dfrac{2(\alpha,\alpha)\alpha}{(\alpha,\alpha)})-(\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}\alpha,\ \alpha-\dfrac{2(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)$

$=(\beta,\alpha)-\dfrac{2(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\beta,\alpha)$

$-\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}(\alpha,\alpha)+\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}\cdot\dfrac{2(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,\alpha)$

$=(\beta,\alpha)-\dfrac{2(\alpha,\alpha)(\beta,\alpha)(\alpha,\beta)-2(\alpha,\beta)(\alpha,\alpha)(\alpha,\alpha)+4(\alpha,\beta)(\alpha,\alpha)(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\beta)(\alpha,\alpha)}$

$=(\beta,\alpha).$ ∴是正交变换.

(2) $\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)A.$

$(\alpha_1\cdots\alpha_n)A=(-1\ \cdots\ 1)(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$

$A\alpha_1=-\alpha_1.\quad A\alpha_2=\alpha_2.$

是正交变换. $\lambda=\pm1.$

存在阵. → ..

矩阵相似为 $\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&\ddots\end{pmatrix}$

⇓

特征值 $-1,1\cdots1.$