10～11春期末

2022年1月14日 星期五　　上午11:44

中国科学技术大学 2010—2011 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 8 = 40$ 分) 填空题.

(1) 给定空间直角坐标系中点 $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(1,1,3)$ 及 $D(1,3,5)$, 则 (a) 经过点 A,B,C 的平面的一般方程为 ____; (b) 四面体 $ABCD$ 的体积为 ____.

(2) 设三阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(2\alpha_1,3\alpha_2,4\alpha_3)$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维列向量. 若 $\det A=2$, 则 $\det B=$ ____.

(3) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$ ____.

(4) 设 A 为正交矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 则 $\det A^*=$ ____. $AA^T=I,\ |A|=\pm1$. $AA^*=|A|I$, $|A||A^*|=1$.

(5) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}x&1&2\\-10&6&7\\y&-2&-1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$. 则 $x=$ ____, $y=$ ____.

(6) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&t-1\\t-1&1\end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 t 必须满足的条件是 ____.

(7) 已知 $\mathbb{R}$ 上四维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,b_1,b_2,\ldots,b_9$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $b_i\ (i=1,2,\ldots,9)$ 非零且与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均正交, 则 $\mathrm{rank}(b_1,b_2,\ldots,b_9)=$ ____.

(8) 设 $P_3[x]$ 为次数小于等于 3 的实系数多项式全体构成的线性空间. 定义 $P_3[x]$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}(p(x))=(x+1)\frac{d}{dx}p(x)$. 则 $\mathscr{A}$ 在基 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵为 ____.

(9) 在线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中 (运算为矩阵的加法和数乘), 记 V_1 为所有对称矩阵构成的子空间, V_2 为所有反对称矩阵构成的子空间. 则 $\dim V_1=$ ____, $\dim V_2=$ ____. 反对称：对角线为0.

2. (15 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2\end{cases}$$

(1) 当 a,b 为何值时, 方程组有解;

(2) 当方程组有解时, 求出对应的齐次方程组的一组基础解系;

(3) 当方程组有解时, 求出方程组的全部解.

3. (12 分) 在线性空间 $M_2(\mathbb{R})$ 中, 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

和

$$\beta_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

分别为 $M_2(\mathbb{R})$ 的两组基.

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 T;

(2) 设 $A\in M_2(\mathbb{R})$ 在 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为 $(1,-2,3,0)^T$, 求 A 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标.

4. (8 分) 考虑分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$, 其中 A 为 n 阶可逆方阵. 证明: $\mathrm{rank}(M)=n+\mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)$.

5. (15 分) 已知二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_3$.

(1) 写出二次型 Q 对应的矩阵 A;

(2) 求正交变换 P, 使 $x=Py$ 把 Q 化为标准形;

(3) 二次型是正定的, 负定的还是不定的, 为什么?

(4) 指出 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 的几何意义.

6. (8 分) 设 V 是欧式空间, $b_1,\ldots,b_n$ 是 V 中一组两两正交的非零向量, $\beta_i=\sum_{k=1}^n a_{ki}b_k\ (i=1,\cdots,m)$, $A=(a_{ij})_{n\times m}$. 证明:

(1) $b_1,\cdots,b_n$ 线性无关; (2) $\dim\langle\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle=\mathrm{rank}\,A$.

1.(2) $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$　$B=(2\alpha_1,3\alpha_2\ 4\alpha_3)$

$\det A=2$.　$\det B=|2\alpha_1,3\alpha_2\ 4\alpha_3|$

$=2|\alpha_1,3\alpha_2\ 4\alpha_3|$

$=24|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=48$. 48

(4) $AA^T=I$, $|A||A^T|=1$. $|A|=1$.

$AA^*=|A|I=I$, $\det A\det A^*=1$　±1.

(6) $1-(t-1)^2=(1-t+1)(1+t-1)=t(2-t)>0$

$t(t-2)<0$, $0<t<2$.

(7) $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\theta$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

$(b_i,\alpha_1)=0$. $(b_i,\alpha_2)=0$. $(b_i,\alpha_3)=0$.

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$　rank $=1$?

(8) $\mathscr{A}(1)=(x+1)\cdot1'=0$

$\mathscr{A}(x)=(x+1)\cdot x'=x+1$

$\mathscr{A}(x^2)=(x+1)(x^2)'=2x(x+1)=2x^2+2x$

$\mathscr{A}(x^3)=(x+1)(x^3)'=3x^2(x+1)=3x^3+3x^2$

$(1\ x\ x^2\ x^3)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&2&3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

(9) 对称：$\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&\ddots\ n\end{pmatrix}$　$\frac{(1+n)n}{2}$　$\frac{(1+n)n}{2}$　$\frac{n(n-1)}{2}$

3.(1) $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)T$

$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}T$.

$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$

$T=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$

(2) $A=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\beta_1-2\beta_2+3\beta_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&3\\0&3\end{pmatrix}$

$(\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\ \alpha_4)X=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)Y=A$

$(\beta_1\ \beta_2\ \cancel{\beta_3}\ \beta_4)T^{-1}X=(\beta)Y$.

$X=TY=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\\-3\\2\end{pmatrix}$

4. $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&-A^{-1}B\\0&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B-AA^{-1}B\\C&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}I&0\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\C&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&\\&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$　$=\begin{pmatrix}A&0\\C&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}\,M=\mathrm{rank}(A)+\max\{\mathrm{rank}\,C,\mathrm{rank}\,D-CA^{-1}B\}$.

C为n列，A为$p\times n$. ~~B为n行~~, B为$n\times q$.

则D为p行q列.

$\mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)\le\mathrm{rank}(D)\le\min\{p,q\}$.

5. $\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{8}{3}\\1&0&\frac{1}{3}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　正交.　$P=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

审题，正交矩阵P.

$3y_1^2+2y_2^2+\frac{8}{3}y_3^2=1$.　椭圆面.

6. $\beta_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_k$. $(\beta_1\cdots\beta_m)=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

(1) 对方程 $\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_nb_n=\theta$,

依次对 $b_1\ldots b_n$ 取内积,

则有对每一个 b_i, $\lambda_i(b_i,b_i)=0$.

$(b_i,b_i)\ne0$, $\therefore\lambda_i=0$, 即 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.

(2) 对方程 $Ab=\beta$, 有 n 个线性无关的列.

$\therefore\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,Ab=n$.

又对于 $\beta_1\ldots\beta_m$ 生成的子空间内,

$\beta_1\ldots\beta_n$ 为n维向量, $\therefore\dim(\beta_1\ldots\beta_m)=n$.

设 $\mathrm{rank}\,A=r$, 则不妨设 A 的前 r 列线性无关.

则 A 的第 j 列都可由前 r 列线性表示.

$\beta_j=(b_1\cdots b_n)\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$,

$\therefore\beta_j$是$\beta_1\cdots\beta_r$的线性组合.

对方程 $\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_r\beta_r=\theta$,

$(\beta_1\cdots\beta_r)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=\theta$.

$\therefore(b_1\cdots b_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=\theta$

$(b_1\cdots b_n)$ 线性无关,　$\Downarrow$ (已证)

又 A 列满秩 ($\mathrm{rank}\,A=$ 列数),

$\therefore\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$.　$\therefore\beta_1\cdots\beta_r$ 无关. $\dim\beta=r$.