向量

2022年4月6日 星期三　　上午7:52

一、向量的简介

0. 向量的线性组合 $c\vec{v}+d\vec{w}$

$c\vec{v}$ 一条直线。

当 $\vec{w}$ 不在该直线上时，$c\vec{v}+d\vec{w}$ 形成平面。

1. 向量与线性组合

列向量 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$　$\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$　$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 行向量。

线性组合：$c\vec{v}+d\vec{w}$。

$c=0, d=0$。$0\vec{v}+0\vec{w}=\vec{0}$ 零向量。

表示向量：坐标、箭头、点。

非零向量的组合
- $c\vec{u}$ 通过 $(0,0,0)$ 的直线
- $c\vec{u}+d\vec{v}$ 通过 $(0,0,0)$ 的平面。
- $c\vec{u}+d\vec{v}+e\vec{w}$ 三维空间

2. 模和点乘。

模：$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$。

夹角。$\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}=\cos\theta$

3. 矩阵。

① 向量的线性组合。$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$　$\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$　$\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}$

$A\vec{x}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}$

矩阵×向量。

和矩阵。$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ 差分矩阵。

行向量点乘。

$Ax=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0,0)\cdot(x_1,x_2,x_3)\\(-1,1,0)\cdot(x_1,x_2,x_3)\\(0,-1,1)\cdot(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix}$

② 给定 x 求 $\vec{b}$　$A\vec{x}=\vec{b}$

给定 $\vec{b}$ 寻找 x。$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$。→ 可逆的 A。

若给定 $\vec{b}=0$，$\vec{x}$ 只能是 $\vec{0}$

③ 循环差分矩阵。$C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$C\vec{x}=\vec{b}$，$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\vec{b}$。（相关。）

$\vec{b}=0$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c\\c\end{pmatrix}$。$\vec{b}$ 相加，无解。

左侧 3 个向量相加为 0。故 ⟹ $b_1+b_2+b_3=0$。

（在这个平面上。）

④ 线性无关与线性相关。

如上，$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}^*=\vec{0}$　　解一必须在 $\vec{u},\vec{v}$ 平面。

添加 $\vec{w}^*$ 等于添加向量

线性相关的。

线性无关的：$0\vec{u}+0\vec{v}+0\vec{w}=\vec{b}$，$\vec{b}=0$。

线性相关的：其他组合如 $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}^*=\vec{b}$，$\vec{b}=0$

A 可逆，线性无关列向量

C 不可逆，线性相关列向量。

二、解线性方程组。

1. 向量与线性方程组。

例如 $\begin{cases}x-2y=1\\3x+2y=11\end{cases}$

行图像：$l_1: x-2y=1$，$l_2: 3x+2y=11$ ⟹ 解 (x,y) 为交点。

列图像：$x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$ ⟹ 解 (x,y) 为该向量的线性组合。

2. 矩阵的消元。

高斯消去法 ⟹ 上三角阵。

行交换 → 非零主元。

主元恒为 0 → $0\vec{x}=\vec{b}$。无解或无穷解。

3. 用矩阵进行消元

消元 → E_{ij} 表示。　E_{ij} → E

E_{ij}：$(i,j)=-l$。$+I$。

矩阵乘法，

$AB=A(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=(A\vec{b}_1,A\vec{b}_2,A\vec{b}_3)$

增广矩阵。一起初等变换。

4. 矩阵性质。

$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$

$AB\cdot C=A\cdot(BC)$，$(AB)\vec{x}=A(B\vec{x})$。

① $AB=C$，$C_{ij}=\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\beta}_j$。

② $AB=A(\vec{b}_1,\vec{b}_2\cdots\vec{b}_n)=(A\vec{b}_1,\cdots A\vec{b}_n)$

③ $AB=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\alpha_1B\\\vdots\\\alpha_mB\end{pmatrix}$

④ $AB=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_n\beta_n$

分块。

5. 逆矩阵

① $A^{-1}A=AA^{-1}=I$。

存在逆矩阵　A 对角化消元，有 n 个非 0 主元。

$A\vec{x}=\vec{0}$，$\vec{x}$ 为非零向量，则 A 不可逆。

$A\vec{x}=\vec{b}$，$A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$，$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$。

$\vec{x}=A^{-1}\vec{0}$，不可能存在 A^{-1}。

⟹ $\vec{x}$ 只能为 $\vec{0}$ 时，A 可逆。

$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$　$ad-bc\neq0$。

逆矩阵唯一。

$BA=I$。$CA=I=AC$

$(BA)C=B(AC)=IC=BI$，$B=C$。

② A,B 都可逆，$A+B$ 不一定可逆，AB 一定可逆。

$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$，倒序。

$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\-5&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$E^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

第 1 行 ×5 倍，第 2 行减去。　第 1 行 ×5 倍，第 2 行加上。

$F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{pmatrix}$　$F^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}$。

$FE=\begin{pmatrix}1&0&0\\-5&1&0\\20&-4&1\end{pmatrix}$　$E^{-1}F^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}$

第 2 行减去第 1 行 ×5。　第 3 行加第 2 行 ×4

第 3 行减去第 2 行 ×4。　第 2 行加第 1 行 ×5。

（FEM，先后顺序问题）。　第 3 行不受 1 影响。

第 3 行受第 1 行影响。

③ 高斯消元法计算 A^{-1}。

$AA^{-1}=A(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)=I$。

$\begin{cases}A\vec{x}_1=\vec{e}_1\\A\vec{x}_2=\vec{e}_2\\A\vec{x}_3=\vec{e}_3\end{cases}$ ⟹ $\begin{pmatrix}A&\begin{matrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{matrix}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}AA^{-1}&IA^{-1}\end{pmatrix}=(I\ \ A^{-1})$

高斯消元。

特别当 A 为对称阵且三对角阵时，

A^{-1} 对称，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$。

特别当 A 是上三角阵时，A^{-1} 也是上三角

6. A 的 LU 分解。

7. 转置与

① 转置、$A^T+B^T=(A+B)^T$。

$(AB)^T=B^TA^T$。　Ax 列组合，x^TA^T 行组合。

A 可逆，A^T 可逆。

② x^Ty。$(x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ → 点乘。

$(xy^T$　$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(y_1\cdots y_n)$ → 叉乘，矩阵）。

$(Ax)^Ty=x^T(A^Ty)$

③ 对称阵。$S^T=S$

AA^T 为对称阵。但 $AA^T\neq A^TA$。

三、向量空间

1. 向量组成的空间。

① R^n 包括所有 n 维列向量（实向量）

C^n 向量为复向量

向量空间：向量 + 运算法则。

② 子空间

所有在子空间中的向量，构成的线性组合都在这个子空间中。

所有子空间包含零向量（过原点的直线、平面）

上三角阵、对角阵。

③ 列空间。

方程 $Ax=b$。如果 A 不可逆，则 b 有范围。

A 乘上列向量 $\vec{x}$，形成列空间 b

A 各列的线性组合 → b。

列空间：A 各列向量的线性组合。得到 R^m 或其子集。

$A_{m\times n}$，列向量有 m 维。⟹ 列空间是 R^m 子空间。

（A 不可逆 / 列秩更小 $n<m$ ⟹ 无法成 R^m）。

$Ax=b$ 有解 ⟺ b 在 A 的列空间内。

列向量张成列空间。

④ 零空间。

零空间 $N(A)$ 包括了 $Ax=0$ 的所有解。

解 $\vec{x}$ 都是在 R^n 中的向量。（A：$m\times n$）。

能形成子空间：$A\vec{x}=0$，$A\vec{y}=0$，

$A(\vec{x}+\vec{y})=0$，$A c\vec{x}=0$。

描述零空间（描述所有解）：寻找特解，

零空间由所有特解的线性组合。

2. $Ax=0$ 的解。⟹ 解空间

① 主元列和自由列。

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$，$Ax=0$ ⟹ $\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$。

$x_1=0$，$x_2=0$。

A 不可逆，所有列都是主元列，无特解。

$B=\begin{pmatrix}A\\2A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{pmatrix}$。$Bx=0$ ⟹ 需要满足 $Ax=0$

$C=(A\ \ 2A)=\begin{pmatrix}1&2&2&4\\3&8&6&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&4\\0&2&0&4\end{pmatrix}$

主元列　自由列。

寻找解时，给自由列赋特值。$(0,1)$。

$x_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$　主元列被决定。

② rref 最简阶梯阵。

$R=\begin{pmatrix}1&0&x&x&x&0&x\\0&1&x&x&x&0&x\\0&0&0&0&0&1&x\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$　3 个主元列　4 个自由列。

列向量在 R^4 中。$C(R)$ → $(b_1,b_2,b_3,0)$

零空间 $N(R)$ 为 R^7 子空间。为 4 个特解生成。

若行 < 列数 ⟺ 方程数 < 未知量数

⟺ 必有自由列（无主元）

⟺ 必有非零解。

③ 矩阵的秩。

秩：主元的个数。

自由列是主元列的组合

④ 秩为 1 的矩阵。

1 个主元，所有行 / 列都是主元行 / 列的倍数。

$A=\begin{pmatrix}1&3&10\\2&6&20\\3&9&30\end{pmatrix}\to R=\begin{pmatrix}1&3&10\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\ 3\ 10)$　行 × 列，uv^T

$Ax=0$，$uv^Tx=0$，$v^Tx=0$。

行空间

秩 ⟹ 线性无关的列数

行 / 列空间的维数。

解空间 / 零空间维数 ⟹ $n-r$。

3. $Ax=b$ 的解。

将 b 看作一列，一起初等变换（增广）。

A 中有全零行。则 ⟹ b 中对应为 0。

如 $\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&0&1&4\\1&3&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ (rref)

① 特解 $Ax_p=b$。

取自由列为 0，可反得主元列

$x_2=x_4=0$，$x_1=1$，$x_3=6$ ⟹ $(1,0,6,0)$ 为特解。

② 几种情况。($A_{m\times n}$)

> rank(A) = m = n = r.

$n-r=0$，零空间为 Z。($x_n=0$)

有且仅有一个特解 $x_p=A^{-1}b$。

> rank(A) = n = r < m.　列满秩

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\-2&-3\end{pmatrix}$　$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$(A|b)$ ⟹ $\begin{pmatrix}1&0&2b_1-b_2\\0&1&b_2-b_1\\0&0&b_3+b_1+b_2\end{pmatrix}=(R|d)$　$R=\begin{pmatrix}I\\0\end{pmatrix}$

必须有 $b_3+b_1+b_2=0$（否则无 x_p、x_n 解）。

$n-r=0$，零空间 $x_n=0$。

特解 $x_p=\begin{pmatrix}2b_1-b_2\\b_2-b_1\end{pmatrix}$。

即：所有列都是主元列。

没有零空间中的非零解。

只有一个解（特解）。

> rank(A) = m < n.　行满秩

$\begin{cases}x+y+z=3\\x+2y-z=4\end{cases}$

$(A\ \ b)=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&2&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&1\end{pmatrix}=(R\ \vec{d})$

自由列 $x_3=0$，特解 $x_p=(2,1,0)$。

对 x_n，$x_3=1$，$Ax=0$ 的解 $(-3,2,1)$

全部解 $x=x_p+x_n=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$。

即：所有行都有主元，R 无零行。

$A\vec{x}=\vec{b}$ 一定有解。　行线性无关。

列空间是整个 R^m。

零空间中有 $n-r=n-m$ 个基。

③ 总结

	A	$Ax=b$
$r=m, r=n$	方阵且可逆	一个解
$r=m, r<n$	行满秩，扁	无穷个解
$r<m, r=n$	列满秩，瘦长	零或一个解
$r<m, r<n$	不满秩	零或无穷个

4. 无关，基和维数。

空间中的所有向量都是基向量的唯一表示。

① 线性无关

定义：$Ax=0$ 只有 $x=0$ 的解。

列向量线性无关 ⟺ 列空间中只有 $\vec{0}$。

R^3 中：不在一个平面，线性无关。

向量组线性无关 ⟺ $x_1\vec{v}_1+\cdots+x_n\vec{v}_n=\vec{0}$ 只有 $\vec{x}=0$。

② 生成子空间

向量组生成子空间：其线性组合成为该子空间。

列向量 → 列空间。　$C(A)$

行向量 → 行空间。　$C(A^T)$

行转置为列形成的列空间是原来的行空间

③ 向量空间的基。

足够多的独立向量生成空间。

基：线性无关且可生成空间。

每种表示独一无二。

寻找基：放为行 / 列。然后 rref。

R 的主元列为对应的基所在列。

④ 维数。

维数唯一：如果 $v_1\cdots v_m$ 和 $w_1\cdots w_n$ 是同一个向量空间的基，则 $m=n$。

假设 $n>m$。

v 为基，则 $\begin{cases}w_1=\sum_{i=1}^{m}a_{1i}v_i\\\vdots\\w_n=\sum_{i=1}^{m}a_{ni}v_i\end{cases}$

$W=(w_1\ w_2\cdots w_n)=(v_1\cdots v_m)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$

$=VA$。

$A_{m\times n}$　$n>m$，$Ax=0$ 有非零解。

V 不全为零，则 $Wx=0$ 有非零解。

则 w 线性相关，不能是基。

$m>n$ 同理可证。

维数：基的个数。

⑤ 矩阵空间 & 函数空间。

$n\times n$ 矩阵空间：E_{ij}，$\dim=n^2$

上三角阵：$\frac{n(n+1)}{2}$

对称阵：对角 + 对称对 $\frac{n(n+1)}{2}$。

函数空间：线性 / 三角 / 指数

5. 四个空间的维数。