正交

2022年5月4日 星期三　　上午8:22

一、子空间正交.

1. 正交向量：$\vec v\cdot\vec w=\vec v^T\vec w=0$

   $v^2+w^2=|\vec v+\vec w|^2$

   正交子空间：对所有 $v\in V$, $w\in W$, 都有 $\vec v\cdot\vec w=0$.

   行空间与 $N(A)$ 正交,（所有行向量与解向量正交）

   $A\vec x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\vec x=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha_i\cdot\vec x=0$.　r — $n-r$

   A的行空间为 $A^T\vec y$, $\vec x^T(A^Ty)=(Ax)^Ty=0^Ty=0$.

   列空间与 $N(A^T)$ 正交.（所有列向量与解向量正交）

   $A^T\vec y=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \vdots\\ \beta_n^T\end{pmatrix}\vec y=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, $\beta_j^T\cdot\vec y=0$.　r — $m-r$

   两正交的子空间：$\dim V+\dim W\le\dim$ 总

   如果一个向量在两个正交的子空间里，则它为零.

2. 正交补：对子空间 V，所有垂直于 V 的向量组成.

   $N(A)$ 与 $C(A^T)$.　$N(A^T)$ 与 $C(A)$

   $A\vec x_n=\vec 0$, $A\vec x_r=A\vec x$.　$\vec x=\vec x_r+\vec x_n$, $A\vec x=A\vec x_r+A\vec x_n$.

   任何向量都可拆成 $N(A)$ 与 $C(A^T)$ 中的向量和.

   所有 $\vec b\in C(A)$ 来自于唯一一个行空间中的向量.

   任何 $\text{rank}=r$ 的矩阵都有 $r\times r$ 可逆矩阵的部分.

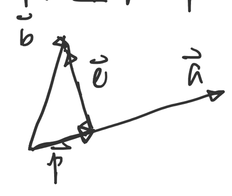
   这部分可以被对角化.

3. 子空间的基.

   行空间, r个.　$N(A)$, $n-r$个 $\Rightarrow$ 共n个.

二、映射

映射阵 P：对称且 $P^2=P$.

① 投影到线：

> 投影向量.

$\vec p=x\vec a$.　$\vec e=\vec b-\vec p=\vec b-x\vec a$.

$\because \vec e\cdot\vec a=(\vec b-x\vec a)\cdot\vec a=0$, $\therefore x=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec a\cdot\vec a}$.

$\vec p=x\vec a=\frac{\vec a^T\vec b}{\vec a^T\vec a}\vec a=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec a\cdot\vec a}\vec a$.

即 $\vec b$ 投影到 $\vec a$ 上形成向量 $\vec p=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec a\cdot\vec a}\vec a$.

例. $\vec b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 投影至 $\vec a=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, 寻找 $\vec p$.

$\vec p=\frac{\vec a^T\vec b}{\vec a^T\vec a}\vec a=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec a\cdot\vec a}\vec a=\frac{5}{9}(1,2,2)$

$\vec b$ 拆分成两部分：垂直 $\vec a$ 的 $\vec e$ 和平行 $\vec a$ 的 $\vec p$.

> 投影矩阵

$\vec p=\vec a x=\vec a\frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec a\cdot\vec a}=P\vec b$, $P=\frac{a\cdot a^T}{\vec a\cdot\vec a}$

$\text{rank}\,P=1$

例. 寻找投影矩阵. 投影至经过 $(1,2,2)$ 的直线.

$P=\frac{\vec a\cdot\vec a}{|\vec a||\vec a|}=\frac19\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}(1,2,2)=\frac19\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}$

投影两次同投影一次, $P^2=P$.

$I-P$ 也是投影矩阵, 投影至与垂直的空间.

② 投影到子空间

$\vec a_1\cdots\vec a_n\in R^m$.　（即在$A$的列空间）

投影结果 $\vec p$ 在 R^m 内, $\vec p=x_1\vec a_1+x_2\vec a_2+\cdots+x_n\vec a_n=A\vec x$.

与 $\vec b$ 距离最短 $\Leftarrow$ 与每个向量都垂直.

垂线段 $\vec e=\vec b-A\vec x$.

$\vec p\cdot\vec e=0$, $\vec a_1(\vec b-A\vec x)=0$ … $\vec a_n(\vec b-A\vec x)=0$

$\therefore \begin{pmatrix}\vec a_1^T\\ \vdots\\ \vec a_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec b-A\vec x\end{pmatrix}=\vec 0$.　$A^T(\vec b-A\vec x)=\vec 0$

$A^T\vec b=A^TA\vec x$.

$A^TA\vec x=A^T\vec b$ 得 $\vec x$.

$\vec p=A\vec x=A(A^TA)^{-1}A^T\vec b$ 得 $\vec p$.

$P=A(A^TA)^{-1}A^T$ 得 P.

即：① 子空间是A的列空间.

② $\vec b-A\vec x$ 与该列空间垂直.

③ $\vec b-A\vec x$ 在 A^T 的零空间里. $A^T(\vec b-A\vec x)=\vec 0$

* A为长方形矩阵, 不能寻找 A^{-1}.

故不能把 $(A^TA)^{-1}$ 拆成 $A^{-1}A^{T-1}$

* 当 A 的列向量线性无关时, A^TA 可逆.

证明：A^TA 是 n阶方阵.

A^TA 与 A 有相同的零空间.

零空间内：$A\vec x=\vec 0$.　$A^TA\vec x=\vec 0$.

A^TA 与 A 的零空间相同.

[$A^TA\vec x=\vec 0$, $(\vec x^T)A^TA\vec x=\vec 0$, $(A\vec x)^TA\vec x=0$, $|A\vec x|=0$]

A列向量线性无关, A^TA 也无关, 可逆

③ 总结：寻找投影 $\vec p=x_1\vec a_1+\cdots+x_n\vec a_n$, 以 $A^TA\vec x=A^T\vec b$

以得 $\vec x$, $\vec p=A\vec x$, $\vec e=\vec b-\vec p$, $P=A(A^TA)^{-1}A^T$

三、正交基.

1. 标准正交, $q_i^Tq_j=\begin{cases}0, & i\ne j\\ 1, & i=j\end{cases}$

   正交阵 $QQ^T=I$, 列向量正交.

   $Q^TQ=\begin{pmatrix}\vec q_1^T\\ \vdots\\ \vec q_n^T\end{pmatrix}(\vec q_1\ \vec q_2\cdots\vec q_n)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

   Q可不是方阵, 如果是则 $Q^T=Q^{-1}$ 可逆.

   如果为长方形 $(m\times n)$, 则 $m>n$.

   只左乘可逆.

   例. 旋转矩阵 $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

   $Q^T=Q^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ -\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

   置换矩阵 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

   $P^T=P^{-1}=\begin{pmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{pmatrix}$

   $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$, $P^T\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

   反射矩阵

   对单位向量 $\vec u$, $Q=I-2uu^T$.

   $Q^T=I-2uu^T=Q$

   $Q^TQ=I-4uu^T+4uu^Tuu^T=I$.

   如 $u=(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$,

   $Q=I-2\times\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12\\ -\frac12&\frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

2. 投影到正交基组成的空间上.

   $A\to Q$.　$Q^TQ=I$,

   $\vec q_1\cdots\vec q_n\in R^m$, $\vec q_1$—$\vec q_n$ 正交, $|\vec q|=1$.

   使得 $\vec x=(A^TA)^{-1}A^T\vec b=Q^T\vec b$,

   $\vec p=A\vec x=Q\vec x=QQ^T\vec b$,

   $P=A(A^TA)^{-1}A^T=Q(Q^TQ)^{-1}Q^T=QQ^T$.

   $=(\vec q_1\cdots\vec q_n)\begin{pmatrix}q_1^T\vec b\\ \vdots\\ q_n^T\vec b\end{pmatrix}$

   如果Q为n阶方阵, 则 $\vec q_1$—$\vec q_n$ 组成的空间（投影至的子空间）为 R^n.

   此时 $Q^T=Q^{-1}$, $\vec x=Q^T\vec b$, $\vec p=\vec b$, $P=QQ^T=I$.

   投影到全空间上.

   $\vec b=QQ^T\vec b=q_1(q_1^T\vec b)+\cdots+\vec q_n(\vec q_n^T\vec b)$

   例. $Q=\frac13\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$, $Q^TQ=QQ^T=I$.

   将 $\vec b=(0,0,1)$ 投影到 Q 的列空间

   $Q\vec x=\vec b$.　$\vec x=Q^T\vec b=\frac13\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac13\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

   $\vec q_1(\vec q_1^T\vec b)=\frac13\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\frac13(-1,2,2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $=\frac13\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\times\frac23=\frac23\vec q_1$.

   $\vec q_2(\vec q_2^T\vec b)=q_2\frac13(2,-1,2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac23\vec q_2$,

   $\vec q_3(\vec q_3^T\vec b)=q_3\frac13(2,2,-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-\frac13\vec q_3$

   $\vec p=\frac23\vec q_1+\frac23\vec q_2-\frac13\vec q_3=\vec b$.

   $\vec p=QQ^T\vec b$

   $(\vec p=\vec b)$

   $=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec b$

3. 施密特正交化.

   ① 对 $\vec a_1$, $\vec a_2$, $\vec a_3$：

   $\vec e_1=\frac{\vec a_1}{|\vec a_1|}$.

   $\vec\beta_2=\vec a_2-(\vec a_2,\vec e_1)\vec e_1$　　$\vec\beta_2=\vec a_2-\frac{\vec a_1^T\cdot\vec a_2}{\vec a_1^T\cdot\vec a_1}\cdot\vec a_1$

   $\vec e_2=\frac{\vec\beta_2}{|\vec\beta_2|}$　　$\vec\beta_3=\vec a_3-\frac{\vec a_1^T\cdot\vec a_3}{\vec a_1^T\cdot\vec a_1}\cdot\vec a_1-\frac{\vec a_2^T\cdot\vec a_3}{\vec a_2^T\cdot\vec a_2}\cdot\vec a_2$.

   $\vec\beta_3=\vec a_3-(\vec a_3,\vec e_1)\vec e_1-(\vec a_3,\vec e_2)\vec e_2$

   $\vec e_3=\frac{\vec\beta_3}{|\vec\beta_3|}$.

   ② 矩阵形式

   $\vec e_1=\frac{1}{|\vec a_1|}\vec a_1$, $\vec e_1$ 与 $\vec a_1$ 在一条线上.

   $\vec e_2=\frac{1}{|\vec\beta_2|}\vec\beta_2=\frac{1}{|\vec\beta_2|}\vec a_2-\frac{\vec a_2\cdot\vec e_1}{|\vec\beta_2|}\vec e_1$, $\vec e_2$ 与 $\vec e_1$、$\vec a_2$ 在同平面,

   $\vec e_3=\frac{1}{|\vec\beta_3|}\vec a_3-\frac{\vec a_3\cdot\vec e_1}{|\vec\beta_3|}\vec e_1-\frac{\vec a_3\cdot\vec e_2}{|\vec\beta_3|}\vec e_2$, $\vec e_3$ 与 $\vec e_1$、$\vec e_2$、$\vec a_3$ 同子空间.

   $(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3)=(\vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3)\begin{pmatrix}\vec e_1\cdot\vec a_1&\vec e_1\cdot\vec a_2&\vec e_1\cdot\vec a_3\\ &\vec e_2\cdot\vec a_2&\vec e_2\cdot\vec a_3\\ &&\vec e_3\cdot\vec a_3\end{pmatrix}$