线性变换

2022年5月3日 星期二 下午1:04

一、线性变换

1. 线性的变换：$T(\vec{v}+\vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$.

$T(c\vec{v}) = cT(\vec{v})$

不是线性变换：平移 $T(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{v}_0$

长度 $T(\vec{v}) = |\vec{v}|$

是线性变换：点乘 $T(\vec{v}) = \vec{a}\cdot\vec{v}$.

旋转

$\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$

$T(\vec{u}) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2) + \cdots + c_nT(\vec{v}_n)$

2. 举例与计算.

① 对 $T(\vec{u}) = \frac{du}{dx}$. 写出矩阵 $\vec{u} \Rightarrow A\vec{u}$.

零空间：$T(\vec{u}) = A\vec{u} = 0$，得 u 为常数的成立，

特别为 $u=1$.（一维）

列空间：u 看列的线性组合 $a+bx+cx^2$，

线性变换后为 $b+2cx$.（二维）.

$\therefore \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = 1, x, x^2$，$\frac{dv_1}{dx}=0$，$\frac{dv_2}{dx}=1=v_1$，$\frac{dv_3}{dx}=2v_2$.

得矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

对 $\vec{u} = a+bx+cx^2$，$Au = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2c \end{pmatrix}$

A的情况取决于基 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

② 对 $T^{+}(u) = \int_0^x u\,dx$.

$v_1 . v_2 = 1, x$，得 $1 . x . x^2$.

得 $A^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$A^{+}\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$

可以认为 $AA^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，为互逆.

③ $T(\vec{u}) = A\vec{u}$.

将所有 $V=R^n \to W=R^m$ 的线性变换写为矩阵.

$T(\vec{u})$ 的范围：所有的变换结果.

$T(\vec{u})$ 的核：使 $T(\vec{u})=0$ 的输入 $\vec{u}$.

如果 $T(\vec{u}) = A\vec{u}$，则对应列空间和零空间.

二、线性变换在不同基下的矩阵

1. 基变换的矩阵.

$T(\vec{v}) = A\vec{v}$. A是 I 下的矩阵.

不同的基表示不同的矩阵.

基 $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ → 最终得出 $T(\vec{v})$.

组成 $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$　组成 $T(\vec{v}) = c_1T(\vec{v}_1) + \cdots + c_nT(\vec{v}_n)$

基的变换 $(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)A = (T(\vec{v}_1), \ldots T(\vec{v}_n))$

$\vec{v} = \vec{c}\cdot\vec{v}_i$，$T(\vec{v}) = \vec{c}\cdot T(\vec{v}_i)$，$\vec{v}\cdot A = T(\vec{v})$，

$\therefore \vec{v}_i \xrightarrow{Ac} T(\vec{v})$

例. 输入基 $(v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$　输出基 $(w_1\ w_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

存在变换 $v_1 = 1w_1 + 1w_2$，$v_2 = 2w_1 + 3w_2$　$(\vec{v}_1\ \vec{v}_2) = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)B$，$B = W^{-1}V$

对变换 $T(\vec{v}) = \vec{v}$：$T\vec{v}_1 = \vec{v}_1$，$T\vec{v}_2 = \vec{v}_2$.

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)B$

输出结果用输出基表示.

$B = W^{-1}V$，用坐标变换也可以.

$A(\alpha) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A = (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

结果用输出基表示

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A = (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) \times I$.

$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)A^{-1}$　$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$