特征值

2022年5月4日 星期三 上午8:22

一、特征值简介.

1. 特征向量.

对向量x，Ax几乎会改变所有x的方向，
但特征向量的方向不会变.
$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$. 大小改变λ倍. λ为特征值.
λ: 伸展/缩短/不变/反向/0.
0表示$\vec{x}$在A的零空间内.

例. $A=\begin{pmatrix}0.8&0.3\\0.2&0.7\end{pmatrix}$

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0.8-\lambda&0.3\\0.2&0.7-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$

$\lambda_1=1$, $A\vec{x}=\vec{x}$. $\begin{pmatrix}-0.2&0.3\\0.2&-0.3\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{x}$.
$\vec{x}=(0.6,0.4)$

$\lambda_2=\frac{1}{2}$, $A\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{x}$. $\begin{pmatrix}0.3&0.3\\0.2&0.2\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}$.
$\vec{x}=(1,-1)$.

则对$A^m\vec{x}$，A^m的特征向量为$\vec{x}_1,\vec{x}_2$，
但A^m的特征值将为1和$(\frac{1}{2})^m$.

A的列向量 $\begin{pmatrix}0.8\\0.2\end{pmatrix}=x_1+0.2x_2$

$\begin{pmatrix}0.3\\0.7\end{pmatrix}=x_1-0.3x_2$

$A\begin{pmatrix}0.8\\0.2\end{pmatrix}=\lambda_1x_1+\lambda_2 0.2x_2=\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.1\\-0.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7\\0.3\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0.3\\0.7\end{pmatrix}=\lambda_1x_1+\lambda_2(-0.3)x_2=\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.15\\0.15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.45\\0.55\end{pmatrix}$

而$A^{99}\begin{pmatrix}0.8\\0.2\end{pmatrix}=\lambda_1^{99}x_1+\lambda_2^{99}0.2x_2=\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}+O(\lambda)$

$A^{99}\begin{pmatrix}0.3\\0.7\end{pmatrix}=\lambda_1^{99}x_1+\lambda_2^{99}(-0.3)x_2=\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}+O(\lambda)$.

例. $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\lambda=1$, $x_1=(1,1)^T$. $P\vec{x}_1=\vec{x}_1$
$\lambda=0$, $x_2=(1,-1)^T$. $P\vec{x}_2=\vec{0}$
P不可逆，$\lambda=0$为特征值.
P对称，x_1. x_2垂直.
P各列相加为1，$\lambda=1$为特征值.

例. 反射矩阵 $R=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\lambda=1$, $\vec{x}_1=(1,1)$
$\lambda=-1$, $\vec{x}_2=(1,-1)$.

4)特征多项式.

2. 消元(初等变换)改变特征值.

特征值之积为$\det A$. 之和为$\mathrm{tr}\,A$.
特征值为虚数 如 $\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}$ (旋转变换)
$\lambda^2+1=0$, $\lambda=\pm i$.
$\lambda=i$, $\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $c(1,-i)^T$
$\lambda=-i$, $\begin{pmatrix}-i&1\\1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $c(1,i)^T$.
实向量都会被旋转方向，也可说没有不变.
正交阵，$|\lambda|=1$, $Q^TQ=I$
反对称阵，$\lambda\in C$, $A^T=-A$.
(对称阵，$\lambda\in R$, $S^T=S$)

3. $AB=BA$, A.B有相同特征值

$AB\vec{x}=\lambda B\vec{x}$.
$BA\vec{x}=\lambda B\vec{x}=B\lambda\vec{x}$.

二、矩阵对角化

1. 对于特征向量，$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$.

若有n个线性无关特征向量，
$A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=(\lambda_1\vec{x}_1,\lambda_2\vec{x}_2\dots\lambda_n\vec{x}_n)$
$=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$
注意左右乘，行/列乘倍数.

$\therefore AX=X\Lambda$, $X^{-1}AX=\Lambda$

例. A为三角阵时，特征值在对角线.
$A=\begin{pmatrix}1&5\\0&6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}$

- A与Λ有相同的特征值，但特征向量不同.
- 如果A没有n个无关特征向量，则不能对角化.
- $A(c\vec{x})=\lambda(c\vec{x})$
- 可逆 ⇒ λ是否有零.
  可对角化 ⇒ $\vec{x}$是否足够.
- 每个特征值都至少有一个特征向量，不为零.

如果A有n个不同的特征值，
则自动有了n个无关的$\vec{x}$，一定可对角化.
证明: 假设$\vec{x}_1.\vec{x}_2$线性相关，$c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2=0$.
则乘以A，$Ac_1\vec{x}_1+Ac_2\vec{x}_2=0$，
$c_1A\vec{x}_1+c_2A\vec{x}_2=0$.
$c_1\lambda_1\vec{x}_1+c_2\lambda_2\vec{x}_2=0$.
乘以λ_2，$c_1\lambda_2\vec{x}_1+c_2\lambda_2\vec{x}_2=0$，
相减得 $c_1(\lambda_1-\lambda_2)\vec{x}_1=0$.
$\lambda_1.\lambda_2$不同，则$c_1=0$. 与线性相关矛盾.
⇒ 2→j. 执行j-1次.

$A^k=X\Lambda^kX^{-1}$. $k=-1$, A^{-1}.
$A^k=(X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1})\cdots(X\Lambda X^{-1})=X\Lambda^kX^{-1}$.
A^k与A的特征向量同.
$|\lambda|<1$, $\lambda^k\to0$, $A^k\to0$.

2. 相似矩阵：相同特征值.

$A=BCB^{-1}$, B为可逆阵，A与C相似.
则A.C有相同特征值.
证明: $C\vec{x}=\lambda\vec{x}$,
则 $BCB^{-1}B\vec{x}=BC\vec{x}=B\lambda\vec{x}=\lambda(B\vec{x})$.
I的相似矩阵只有I.
Jordan 矩阵 相似. det=1, trace=2

3. 斐波那契.

记 $\vec{u}_k=\begin{pmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{pmatrix}$. 则 $\vec{u}_{k+1}=\begin{pmatrix}F_{k+2}\\F_{k+1}\end{pmatrix}$

$\begin{cases}F_{k+2}=F_{k+1}+F_k\\F_{k+1}=F_{k+1}\end{cases}$ $=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\vec{u}_k$.

$\therefore\vec{u}_{100}=A^{100}\vec{u}_0=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{100}\vec{u}_0$.

$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&1\\1&-\lambda\end{pmatrix}$, $\det(A-\lambda I)=\lambda^2-\lambda-1$.

得A的特征值 $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$u_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{\lambda_1-\lambda_2}$. →特征向量.

$u_{100}=\frac{(\lambda_1)^{100}x_1-(\lambda_2)^{100}x_2}{\lambda_1-\lambda_2}$

$\lambda_2\sim0$, 则 $F_{100}\approx\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{100}$.

4. $\vec{u}_k=A^k\vec{u}_0$. $A^k\vec{u}_0=X\Lambda^kX^{-1}\vec{u}_0$.

$\vec{u}_0=c_1\vec{x}_1+\dots+c_n\vec{x}_n$, $\vec{u}_0=X\vec{c}$, $\vec{c}=X^{-1}\vec{u}_0$.
$\vec{x}_i$乘上特征值$(\lambda_i)^k$, 得 $\Lambda^kX^{-1}\vec{u}_0$.
将 $c_i(\lambda_i)^k\vec{x}_i$相加, $\vec{u}_k=\Lambda^kX^{-1}\vec{u}_0$
$\vec{u}_k=A^k\vec{u}_0=X\Lambda^kX^{-1}\vec{u}_0$.
$\vec{u}_0=(\vec{x}_1\dots\vec{x}_n)\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=X\vec{c}$.
$\vec{c}=X^{-1}\vec{u}_0$.
$A^k\vec{u}_0=X\Lambda^kX^{-1}\vec{u}_0=X\Lambda^k\vec{c}=(\vec{x}_1-\vec{x}_n)\begin{pmatrix}(\lambda_1)^k&&\\&\ddots&\\&&(\lambda_n)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$
$A^kX\vec{c}=X\Lambda^k\vec{c}=X\Lambda^kX^{-1}\vec{u}_0$

三、对称阵.

1. 定义: $S=S^T$.

将对称阵对角化时，
$S=Q\Lambda Q^{-1}$. $S=S^T$, $\therefore Q^{-1}=Q^T$.
$S^T=(Q^{-1})^T\Lambda Q^T$. Q为标准正交基.
所有对称阵都只有实特征值.
特征向量可以是标准正交基.
⇒ 可分解为实对角阵Λ与标准正交基.

① 特征值均为实数:
假设 $\lambda=a+ib$. 则 $\bar{\lambda}=a-ib$.
同时求得的$\vec{x}$也为复向量，存在共轭$\bar{\vec{x}}$.
$S\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $S\bar{\vec{x}}=\bar{\lambda}\bar{\vec{x}}$. ⇒ $\bar{\vec{x}}^TS=\bar{\vec{x}}^T\bar{\lambda}$.
$\bar{\vec{x}}^TS\vec{x}=\bar{\vec{x}}^T\lambda\vec{x}=\lambda|\vec{x}|^2$ $\bar{\vec{x}}^TS\vec{x}=\bar{\vec{x}}^T\bar{\lambda}\vec{x}=\bar{\lambda}|\vec{x}|^2$.
$\therefore\lambda=\bar{\lambda}$, $a+ib=a-ib$, $b=0$, $\lambda=a$.

② 特征向量正交.
$S\vec{x}=\lambda_1\vec{x}$. $S\vec{y}=\lambda_2\vec{y}$. $\lambda_1\neq\lambda_2$.
$(\lambda_1\vec{x})^T\vec{y}=(S\vec{x})^T\vec{y}=\vec{x}^TS^T\vec{y}=\vec{x}^TS\vec{y}=\vec{x}^T\lambda_2\vec{y}$.
$\vec{x}^T\lambda_1\vec{y}=\vec{x}^T\lambda_2\vec{y}$. $\lambda_1\neq\lambda_2$时，$\vec{x}^T\vec{y}=0$.

例. $S=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}b\\\lambda_1-a\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}\lambda_2-c\\b\end{pmatrix}$.
$\vec{x}_1^T\vec{x}_2=b(\lambda_2-c)+(\lambda_1-a)b$
$=b(\lambda_1+\lambda_2-a-c)=0$.

2. 实矩阵的复特征值.

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ ⇒ $A\bar{\vec{x}}=\bar{\lambda}\bar{\vec{x}}$.
例. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$
$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\lambda-\cos\theta\end{vmatrix}=(\lambda-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=0$
$\lambda_1=\cos\theta+i\sin\theta$, $\lambda_2=\cos\theta-i\sin\theta$.
$A\vec{x}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}=\cos\theta+i\sin\theta+\sin\theta-i\cos\theta$
$=(\cos\theta+i\sin\theta)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}=\lambda\vec{x}$.
$A\bar{\vec{x}}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=\cos\theta-i\sin\theta+\sin\theta+i\cos\theta$.
$=(\cos\theta-i\sin\theta)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=\bar{\lambda}\bar{\vec{x}}$.
标准正交基. $|\lambda|=1$.

3. 特征值和主元.

三角阵：主元相乘=行列式=特征值相乘.
对称阵：正的主元个数=正的特征值个数.
$A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&\\&-8\end{pmatrix}}_{\text{主元(消元). 初等变换.}}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=LDL^T$.
特征值 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3\\-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-3^2$,
$\lambda_1=4$, $\lambda_2=-2$.
把L换成I，不改变主元，$IDI^T=\begin{pmatrix}1&\\&-8\end{pmatrix}$.
$LDL^T(A)$的特征值 → IDI^T的特征值.
变的过程中正负没有改变.

4. 对称阵都可对角化.

n个不同特征值 ⇒ 必有n个无关特征向量.
<n个 ⇒ 特征向量可能少，无法对角化.
但对称阵一定有足够的特征向量个数.

任何方阵A可分解为QTQ^{-1},
其中T为上三角阵，且$Q^T=Q^{-1}$.
若该方阵为对称阵S，则T也为对称阵.
所以T为对角阵Λ.

四、正定阵

1. 正定：对于对称阵S，特征值都为正.

正定阵的判别.
$S=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\to|\lambda I-S|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-b&\lambda-c\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2$
$\lambda_1+\lambda_2=a+c>0$, $\lambda_1\lambda_2=ac-b^2>0$
⇒ $\lambda_1.\lambda_2>0$, $a>0$ 且 $ac-b^2>0$.
$S=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&b\\0&c-\frac{b^2}{a}\end{pmatrix}$ $a>0$ 且 $c-\frac{b^2}{a}=\frac{ac-b^2}{a}>0$.
以帮助判定主元的正负性.

2. 二次型定义的矩阵.

① $S\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $\vec{x}^TS\vec{x}=\lambda\vec{x}^T\vec{x}$. S正定则恒正.
对特征向量而言恒正，且对任何向量恒正.
$\vec{x}^TS\vec{x}$ ($\frac{1}{2}\vec{x}^TS\vec{x}$): 二次型(能量)定义.

② 定义: 对∀非零向量$\vec{x}$, $\vec{x}^TS\vec{x}>0$, 则S为正定阵.
例如2阶: $\vec{x}^TS\vec{x}=(x\ y)\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2>0$.

③ 如果S. T分别正定，则S+T也正定.
$\vec{x}^T(S+T)\vec{x}=\vec{x}^TS\vec{x}+\vec{x}^TT\vec{x}$.
(难以用主元/特征值检验，但易用二次型).

④ 如果A列向量线性无关，则对称阵 $S=A^TA$是正定的.
$\vec{x}^TS\vec{x}=\vec{x}^TA^TA\vec{x}=(A\vec{x})^T(A\vec{x})=\|A\vec{x}\|^2$.
线性无关 ⇒ 对∀$\vec{x}\neq0$, $A\vec{x}\neq0$. ∴>0.
∴S正定.

例. 检验对称阵的正定性.
$S=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$. $T=\begin{pmatrix}2&-1&b\\-1&2&-1\\b&-1&2\end{pmatrix}$

计算: S主元2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$. >0
/主子式 2, 3, 4. >0.
/特征值 $2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$ >0
/ $S=A^TA=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ →列线性无关
/ $S=LDL^T=\begin{pmatrix}1&&\\-\frac{1}{2}&1&\\&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&\frac{3}{2}&\\&&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\\&1&-\frac{2}{3}\\&&1\end{pmatrix}$
$=(L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T=A_2^TA_2$
/ $S=Q\Lambda Q^T$
对T: $\det T=4+2b-2b^2=(1+b)(4$
$b\in(-1,2)$, $T>0$.

3. 半正定.

最小的特征值为0，行列式为0.
二次型 $\vec{x}^TS\vec{x}\geq0$.
例. $S=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=A^TA$
线性相关的列向量，半正定.
$T=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$
循环差分A → 循环T.