实二次型

2021年12月23日 星期四　　上午11:17

一、概念.

1. 引入.

实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

$(g_{ij})_{n\times n}=G$，取基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$.

$0\le(\alpha,\alpha)=X^TGX=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}x_ix_j$

$=\sum_{i=1}^{n}g_{ii}x_i^2+\sum_{i<j}2g_{ij}x_ix_j$.

$=\sum_{i=1}^{n}g_{ii}x_i^2+\sum_{i\ne j}g_{ij}x_ix_j$.

2. 定义：实二次型.

① 实系数多项式.

② 多项式中只出现二次项.

$Q(x_1,x_2)=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$a_{12}=a_{21}$.

$=a_{11}x_1^2+a_{12}x_2x_1+a_{21}x_1x_2+a_{22}x_2^2$.

$=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$.

$\Rightarrow$ 取 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=a_{ji}$.

构造 $(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{i\ne j}a_{ij}x_ix_j$.

例. $Q(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+3x_1x_3$

$=(x_1\ x_2\ x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}-1&2&\frac32\\2&1&0\\\frac32&0&2\end{pmatrix}$

二、性质.

1. A为n阶实对称阵，存在正交阵P使得 $P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$，用二次型表示.

$Q(x_1\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{i\ne j}a_{ij}x_ix_j$

$=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}y_i^2$　　$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$　P可逆 y唯一.

$\therefore Q(x_1\cdots x_n)=X^TAX$，$X=PY$.

$=(PY)^TA(PY)=Y^TP^TAPY$.

$=(y_1\cdots y_n)P^TAP\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$=(y_1\cdots y_n)\begin{pmatrix}b_{11}&&\\&\ddots&\\&&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}y_i^2=Q(y_1\cdots y_n)$.

$Q=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=X^TAX$

A对称，∃正交阵T使 $T^TAT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

$\therefore A=T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}T^T$

$\therefore Q=X^TT\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}T^TX$

令 $Y=T^TX=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，$X=TY$.

$\therefore Q=Y^T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}Y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

$\therefore P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.　P正交，$P^T=P^{-1}$，$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$，特征.

其中P正交（条件强），$P^T=P^{-1}$.

$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 为特征值，

求P的方法即为特征向量+正交化.

2. 相合关系与相合标准形：

仅需求存在可逆阵P，使 $P^TAP=\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}$

① 配平方法求P.

例. $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2+x_3^2$ 化为标准型.

$Q(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2+\frac12x_1x_2+\frac1{16}x_2^2)+x_3^2-\frac18x_2^2$

$=2(x_1+\frac14x_2)^2-\frac18x_2^2+x_3^2$.

$=2y_1^2-\frac18y_2^2+y_3^2$.

$\begin{cases}y_1=x_1+\frac14x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$　$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac14&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac14&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=PY$.

标准形（之一）$\begin{pmatrix}2&&\\&-\frac18&\\&&1\end{pmatrix}$

P不是正交阵，形成的标准形不唯一.

例. $Q_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

$=x_1^2+x_1(x_2+x_3)+\frac{(x_2+x_3)^2}{4}-\frac{(x_2+x_3)^2}{4}+x_2^2+x_3^2+x_2x_3$

$=(x_1+\frac{x_2+x_3}{2})^2+x_2^2+x_3^2-\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_3^2}{4}-\frac{x_2x_3}{2}-x_2x_3$

$=y_1^2+\frac34y_2^2+\frac34y_3^2-\frac32y_2y_3$　$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=y_1^2+\frac34(y_2^2-2y_2y_3+y_3^2)$

$=y_1^2+\frac34(y_2-y_3)^2$

$=z_1^2+\frac34z_2^2+0z_3^2$.

例. $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$.

令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ $\Rightarrow$ 形成平方项.

$\Rightarrow$ 对任一实二次型均可通过配平方法找到可逆变换 $x=Py$ 化成标准型.

证明：数归.

② 初等变换法求P.

$P^TAP=\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}=P_t^TP_{t-1}^T\cdots P_1^TAP_1P_2\cdots P_t$

$(S_{ij}^T=S_{ij}.\ D_i(\lambda)^T=D_i(\lambda).\ T_{ij}(\lambda)^T=T_{ji}(\lambda).)$

$IP=IP_1P_2\cdots P_t=P$.

$\therefore\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\\&P&\end{pmatrix}$

例. $Q=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$.

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&-3\\-2&-3&0\\1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&-2\\0&-2&-2\\1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac12&-2\\0&-2&2\\1&-\frac12&1\\1&\frac12&1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac12&0\\0&0&2\\1&\frac12&1\\1&\frac32&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix}1&-\frac12&3\\1&\frac12&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$　$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac12&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

3. 相合规范形.

例. 上题标准形 $P_1^TAP_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac12&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

$P_2^TP_1^TAP_1P_2=\begin{pmatrix}\frac1{\sqrt2}&&\\&\sqrt2&\\&&\frac1{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&-\frac12&\\&&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac1{\sqrt2}&&\\&\sqrt2&\\&&\frac1{\sqrt6}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$

$S_{23}P_2^TP_1^TAP_1P_2S_{23}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 规范形.

① 定义：存在可逆方阵P，使 $Q(x_1\cdots x_n)$

$\overset{x=PY}{=\!=}y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2=\begin{pmatrix}I_r&&\\&-I_s&\\&&0\end{pmatrix}$

② 性质：标准形不唯一，规范形唯一.

即对于 $P^TAP=\begin{pmatrix}I_s&&\\&-I_t&\\&&0\end{pmatrix}$，s.t唯一确定.

证明：$Q(x_1,\cdots x_n)\overset{x=P_1Y}{=}y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2+0y_{r+s+1}$

$\overset{x=P_2Z}{=}z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2+0z_{p+q+1}$.

首先 $r+s=p+q$，秩不改变.

故只需证 $r=p$.

设 $\begin{cases}Y=P_1^{-1}X\ ,&P_1^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}\\Z=P_2^{-1}X\ ,&P_2^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}.\end{cases}$

$\begin{cases}y_1=b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n\\\vdots\\y_r=b_{r1}x_1+\cdots+b_{rn}x_n\\z_{p+1}=c_{p+1\,1}x_1+\cdots+c_{p+1\,n}x_n\\\vdots\\z_n=c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n\end{cases}$　r个；n-p个

假设 $r\ne p$. 不妨设 $r<p$.

则有 $r+(n-p)=n+(r-p)<n$.

方程个数 < 未知数个数.

∴该方程关于X有非零解.

赋值法：取 $X=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\ne\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

使 $Y=P_1^{-1}X=P_1^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\*\end{pmatrix}$ }r个0 }n-r个其他，

$Z=P_2^{-1}X=P_2^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ }p个其他 }n-p个0

$\therefore Q=y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2+0y_{r+s+1}^2+\cdots+0y_n^2$

$=-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2+0y_{r+s}^2+\cdots+0y_n^2\le0$

$Q=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-z_{p+q}^2+0z_{p+q+1}^2+\cdots+z_n^2$

$=z_1^2+\cdots+z_p^2>0$.

∴矛盾，假设错误.

$\Rightarrow$ r为正惯性指数，s为负惯性指数.

4. 正定性.

① A相合于 I_n.

有 $X^TAX\overset{X=PY}{=\!=}y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.

令 $X=(a_1\ a_2\cdots a_n)^T$，

$\therefore Y=PX=P\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\hat{=}\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$.

$X^TAX=b_1^2+\cdots+b_n^2\ge0$.

$b_1=b_2\cdots=b_n=0\Leftrightarrow X^TAX=0$

有 X^TAX 正定 $\Leftrightarrow\forall X$ 都有 $X^TAX\ge0$.

且 $X^TAX=0\Leftrightarrow X=\theta$.

$\Leftrightarrow$ A相合于 I_n.

实对称A正定.

* G正定.

$(\alpha,\beta)=X^TGY$.

$(\alpha,\alpha)=X^TGX\ge0$

② A为实对称阵.

A正定 $\Leftrightarrow X^TAX\ge0$，且取等 $\Leftrightarrow X=\theta$.

$\Leftrightarrow$ A相合于 I_n，即存在可逆P，使 $P^TAP=I_n$.

$\Leftrightarrow$ A相合于另一正定阵.

$\Leftrightarrow X^TAX$ 的正惯性指数为n.

$\Leftrightarrow$ n个特征值均为正数.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆P使 $P^TP=A$.

③ 定理：实二次型 $Q=x^TAx$ 正定

$\Leftrightarrow$ 实对称矩 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的各阶顺序主子式均大于零.

子式：子矩阵的行列式 $\det\begin{pmatrix}i_1&i_2\cdots&i_k\\j_1&j_2\cdots&j_k\end{pmatrix}$

主子式：子矩阵对角线元素为原矩阵对角线元素. $\det\begin{pmatrix}i_1&i_2\cdots&i_k\\i_1&i_2\cdots&i_k\end{pmatrix}$

顺序主子式：主子式以1开始逐个取.

$\det\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}$.

证明：设A正定，则 X^TAX 正定，且 $|A|>0$.

取 $X=(x_1\cdots x_k,0,\cdots0)$.

此时 $X^TAX=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$

$=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j$.

$=(x_1\cdots x_k)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}$.

$Q=(x_1\cdots x_k)A_{11}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}\Rightarrow$ 正定.

则 $|A_k|>0$，顺序主子式.

证明：n=1时显然.

n-1时，假设 A_{n-1} 正定.

n时，$A_n=\begin{pmatrix}A_{n-1}&C\\C^T&a_{nn}\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}A_{n-1}&0\\C^T&a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}A_{n-1}&0\\0&a_{nn}-C^TA_{k-1}^{-1}C\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}I_{n-1}&0\\-C^TA_{n-1}^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{n-1}&C\\C^T&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n-1}&-CA_{n-1}^{-1}\\0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}I_{n-1}&0\\0&\underbrace{a_{nn}-C^TA_{k-1}^{-1}C}_{>0}\end{pmatrix}$

$P_{n-1}^TA_{n-1}P_{n-1}=I_{n-1}$.

有 $\begin{pmatrix}I_{n-1}&0\\0&\frac1{\sqrt{\ }}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{n-1}^T&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n-1}&0\\-C^TA_{n-1}^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{n-1}&C\\C^T&a_{nn}\end{pmatrix}\cdots$

* $C^TA_{n-1}C$ 看作二次型，x取C，为正.

$\therefore a_{nn}>0$.

* 顺序主子式 >0 $\Leftrightarrow$ A正定.

$\Updownarrow$ 相合

主子式 >0

④ 分类：正定. 负定

半正定. 半负定.

不定.

A负定 $\Leftrightarrow X^TAX\le0$，且取等 $\Leftrightarrow X=\theta$.

$\Leftrightarrow$ A相合于 $-I_n$，即存在可逆P，使 $P^TAP=-I_n$.

$\Leftrightarrow$ A相合于另一负定阵.

$\Leftrightarrow X^TAX$ 的负惯性指数为n

$\Leftrightarrow$ n个特征值均为负数.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆P使 $-P^TP=A$.

---

1. A半正定 $\Leftrightarrow A=P^TP$.

$\Rightarrow$. A半正定，∃Q使 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&\ddots\ 0\end{pmatrix}$

$A=(Q^{-1})^T\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&\ddots\ 0\end{pmatrix}Q^{-1}$

$P=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&\ddots\ 0\end{pmatrix}Q^{-1}$.　$A=P^TP$.

$\Leftarrow$　$A=P^TP$，$x^TP^TPx=(Px,Px)\ge0$.

A半正定.

2. A为半正定，主子式 ≥0.

$A_\lambda=\lambda I+A$.

证明 A_λ 正定.

$|A_\lambda|=\begin{vmatrix}a_{11}+\lambda&&a_{ij}\\&a_{22}+\lambda&\\a_{ij}&&\ddots\ a_{nn}+\lambda\end{vmatrix}$

$=\lambda^n+\_\lambda^{n-1}+\_\lambda^{n-2}+\cdots+|A|\lambda^0$.

λ^{n-j} 前的系数：j阶顺序主子式的和 ≥0.

$\lambda>0$ 时. $|A_\lambda|>0$. 且 A_λ 所有顺序主子式 >0.

$\therefore A_\lambda$ 正定. $\lambda\to0$，A半正定.

3. $f(x_1\cdots x_n)=\sum_{j=1}^{n}x_j^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$.

$f(x_1\cdots x_n)=x^T\begin{pmatrix}1&&\frac12\\&1&\\\frac12&&\ddots\ 1\end{pmatrix}x$.　看k阶主子式.

$\begin{vmatrix}1&&\frac12\\&1&\\\frac12&&1\end{vmatrix}_{k\times k}=(1+\frac12(k-1))(\frac12)^{k-1}$

4. $g(x_1\cdots x_n)=\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2$.

g半正定. $x_1=\cdots=x_n$ 时取零.

换元 $\begin{cases}y_1=x_1-\bar x\\\vdots\\y_{n-1}=x_{n-1}-\bar x\\y_n=x_n-\bar x.\end{cases}$　变换 $P=\begin{pmatrix}\frac{n-1}{n}&-\frac1n&\cdots&-\frac1n\\&&&\end{pmatrix}$ → 不可逆.

↓

换元 $\begin{cases}y_1=x_1-\bar x\\\vdots\\y_{n-1}=x_{n-1}-\bar x\\y_n=x_n\end{cases}$　$g(x_1\cdots x_n)=\sum_{j=1}^{n-1}y_j^2+(y_1+\cdots+y_{n-1})^2$.

g的正惯性指数 n-1.

5. $Q=(x_1+a_1x_2)^2+\cdots+(x_n+a_nx_1)^2$

$\begin{cases}y_1=x_1+a_1x_2\\\vdots\\y_n=x_n+a_nx_1\end{cases}$　$y=\begin{pmatrix}1&a_1&&\\&1&a_2&\\&&\ddots&a_n\\a_n&&&1\end{pmatrix}x$

判断行列式确定正定.

$\begin{pmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}\lambda-5&-6&3\\1&\lambda&-1\\-1&-2&\lambda+1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-5)(\lambda+1)\lambda+6(\lambda+1)-2(\lambda-5)+3\lambda-6-6$

$=\lambda(\lambda^2-4\lambda-5)+6\lambda+6-2\lambda+10+3\lambda-12$

$=\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda+7\lambda+4$

$=\lambda^3-4\lambda^2+2\lambda+4$

$=\lambda^2(\lambda-4)+2(\lambda-2)$

$A\alpha=\alpha$.　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$.

$A\alpha=-\alpha$. $\Rightarrow A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0&\alpha_2&\alpha_3\\1&&\\1&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\alpha_2&\alpha_3\\-1&&\\-1&&\end{pmatrix}$.

$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec\beta_2+\vec\beta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$(A+I)\alpha=0$.

$(A-I)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0$.　$x_2+x_3=0$

$\beta_2+\beta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$