课后题&证明题

2022年7月2日 星期六 下午6:50

陆

1. (1) $\mathscr{A}(\lambda c, b) = (\lambda c + b, \lambda^2 c^2)$

$\lambda \mathscr{A}(c, b) = (\lambda c + \lambda b, \lambda c^2)$ ×

(2) $\mathscr{A}(0,0,0) = (0,0,1)$ ×

(3) $\mathscr{A}(\lambda X) = A\lambda X - \lambda X B = \lambda(AX - XB)$.

$\mathscr{A}(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)B$

$= AX - XB + AY - YB$

$= \mathscr{A}(X) + \mathscr{A}(Y)$. ✓

(4) $\mathscr{A}(\alpha)$ 不一定为 ×.

$\alpha = 0$. ✓

2. (1) $\mathscr{A}(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$= \mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathscr{A}(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})$ $\qquad \frac{x^3}{3!} = \frac{3x^2}{3!}$

$= \mathscr{A}(1, x, \frac{x^2}{2}, \cdots, \frac{x^n}{n!})$

$= (0, 1, x, \frac{x^2}{2}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!})$

$= (1, x, \frac{x^2}{2}, \cdots, \frac{x^n}{n!})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\mathscr{A}\vec{\alpha_1} = (e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - e^{ax}b\sin bx$

$= ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$

$= a\vec{\alpha_1} - b\vec{\alpha_2}$

$\mathscr{A}\vec{\alpha_2} = (e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$= a\vec{\alpha_2} + b\vec{\alpha_1}$.

$\mathscr{A}\vec{\alpha_3} = e^{ax}\cos bx + axe^{ax}\cos bx - bxe^{ax}\sin bx$

$= \vec{\alpha_1} + a\vec{\alpha_3} - b\vec{\alpha_4}$

[illegible]

柒

1. ✓
2. ✓
3. ✓
4. ✓

[illegible]

捌

[illegible]

重点证明

1. 复数域内一定可以上三角化.

设 F 上 n 阶矩阵的特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 全在 F 中，则 ∃ F 上的可逆 P，使 $P^{-1}AP$ 上三角.

证明：$n=1$ 时显然成立.

$n-1$ 时假设成立.

即 ∃ 可逆 $Q \in F$，使 $Q^{-1}A_{n-1}Q$ 为上三角阵

则 n 时，设 λ_1 为 A 的一个特征值，

则 ∃ 列向量 $\vec{e_1} \neq 0$，使 $A\vec{e_1} = \lambda_1\vec{e_1}$.

将 $\vec{e_1}$ 扩充为 F^n 的一组基 $\vec{e_1} \cdots \vec{e_n}$.

则 $(A_n e_1, A_n e_2 \cdots A_n e_n) = (e_1\, e_2 \cdots e_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$

其中 A_{n-1} 是 F 上的 $n-1$ 阶矩阵.

令 $P = (e_1 \cdots e_n)$，则 P 是 F 上的 n 阶可逆阵

∴ $AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & Q^{-1}A_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & Q^{-1}A_{n-1}Q \end{pmatrix}$

∴ 取 $T = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，

$T^{-1}A_nT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & \ddots \end{pmatrix}$ 为上三角.

[illegible]