证明　重开

2022年1月5日 星期三　　上午8:59

1. 定义.

2. 性质.

① A 为 n 阶实对称阵，则存在正交阵 P，使 $P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

证明：$Q=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}x_ix_j$

$=\sum_{i=1}^n b_{ii}y_i^2$，$X=PY$.

$=X^TAX=(PY)^TA(PY)$

$=Y^TP^TAPY=(y_1\cdots y_n)\begin{pmatrix}b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. 特征值.

② A 为 n 阶实对称阵，则存在可逆阵 P，使 $P^TAP=\begin{pmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$.

S_1 配方法.

$Q=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

按 a_{11} 分类，鼓励.

S_2 初等变换法.

$Q=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$P^TAP=I$.

行　列

$\begin{pmatrix}A\\ I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P^TAP\\ IP\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I\\ P\end{pmatrix}$.

3. 惯性规范形.

A 为 n 阶实对称方阵，则∃可逆 P，使 $P^TAP=\begin{pmatrix}I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0\end{pmatrix}$. r,s 固定.

证明：设 $S^TAS=\begin{pmatrix}I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

首先 p,s 初等变换，$r+s=p+q=r(A)$.

则只需证 $r=p$.

设 $Q(x_1,\cdots,x_n)$

$\overset{X=P_1Y}{=}y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2+0y_{r+s+1}^2+\cdots+0y_n^2$

$\overset{X=P_2Z}{=}z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2+0z_{p+q+1}^2+\cdots+0z_n^2$

设 $\begin{cases}Y=P_1^{-1}X, & P_1^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}.\\ Z=P_2^{-1}X, & P_2^{-1}=(c_{ij})_{n\times n}.\end{cases}$

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}y_1&=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n\\ &\vdots\\ y_r&=b_{r1}x_1+b_{r2}x_2+\cdots+b_{rn}x_n\end{aligned}\right\}r\text{个}\\ \left.\begin{aligned}z_{p+1}&=c_{p+1,1}x_1+c_{p+1,2}x_2+\cdots+c_{p+1,n}x_n\\ &\vdots\\ z_n&=c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n.\end{aligned}\right\}n-p\text{个}\end{cases}$$

假设 $r\neq p$，不妨设 $r<p$.

则有 $r+n-p<n$.

方程数＜未知数 ⇒ 存在非零解.

赋值法：取 $X=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

$Y=P_1^{-1}X=P_1^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}\begin{matrix}\}r\text{个}\\ \\ \}n-r\text{个}\end{matrix}$ （y 的取值）

$Q=0+\cdots+0-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2+0y_{r+s+1}^2+\cdots+0y_n^2\le 0$.

$Z=P_2^{-1}X=P_2^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\}p\text{个}\\ \\ \}n-p\text{个}\end{matrix}$ （z 的取值）

$Q=z_1^2+\cdots+z_p^2-0-\cdots-0+0+\cdots+0>0$. 矛盾.

r,s 确定，正/负惯性指数.

4. 正定.

① A 为实对称阵.

A 正定，$Q=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\ge 0$.

∃P 可逆使 $P^TAP=I$. ($P^TP=A$)

（正惯性指数 $r=n$）.

证明：$Q=X^TAX\overset{X=PY}{=}Y^TP^TAPY=y_1^2+\cdots+y_n^2\ge 0$.

$A=(a_1\cdots a_n)$，$P^TAP=(b_1\cdots b_n)$.

当且仅当 $y_1=\cdots=y_n$ 时，$Q=0$.

$\det(A)>0$.

所特征值均为正数.

② 判定定理：

实对称 A 正定 ⇔ 各阶顺序主子式 >0.

证明：$n=1$，$Qx_1=a_{11}x_1^2>0$. ✓ $|a_{11}|>0$ ✓

$n=k-1$ 时，$Q(x_1,\cdots,x_{k-1})=(x_1,\cdots,x_{k-1})\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,k-1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{k-1}\end{pmatrix}\ge 0$.

$A_{k-1}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,k-1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k-1}\end{pmatrix}$ 各阶 >0

$n=k$ 时，$A_k=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k}\\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k-1} & a_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{k-1} & C\\ C^T & a_{kk}\end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix}I_{k-1} & 0\\ -C^TA_{k-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{k-1} & C\\ C^T & a_{kk}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}A_{k-1} & C\\ 0 & a_{kk}-C^TA_{k-1}^{-1}C\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}I_{k-1} & -A_{k-1}^{-1}C\\ 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_{k-1} & 0\\ 0 & a_{kk}-C^TA_{k-1}^{-1}C\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}P^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}P^TA_{k-1}P & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}I_{k-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. $\left[\begin{matrix}A_k\text{ 正定},\ m>0.\\ P^TA_{k-1}P\to I.\end{matrix}\right]$

且 $a_{kk}>0$

∴ $\det A_k>0$. $\det A_{k-1}>0$

③ 分类.

5. 二次曲面.

① 柱面：椭/双/抛 $z=0$

旋转曲面：椭/双/抛

$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=0$ 等.

② 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

③ 双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. (单)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. (双)

④ 二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

⑤ 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

⑥ 双曲抛物面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$