线性变换

2021年11月25日 星期四 上午9:51

一. 线性变换

1. 引入例

① 设 $f: V \to V$, $\alpha \to \lambda\alpha + \beta$.

若 $\beta = \theta$, 则 $f(\alpha) = \lambda\alpha$, $f(\alpha_1+\alpha_2) = \lambda(\alpha_1+\alpha_2)$.

若 $\beta \neq \theta$, 则 $f(\alpha_1+\alpha_2) \neq f(\alpha_1)+f(\alpha_2)$.

② 定义 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $\alpha \to A\alpha$

③ $\mathbb{R}$ 上, $V = \mathbb{R}^2$, $f: (x,y) \to (x', y')$

$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $(x',y') = (r\cos(\varphi+\theta), r\sin(\varphi+\theta))$

$= (r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta, \ r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta)$

$= (x\cos\theta - y\sin\theta, \ x\sin\theta + y\cos\theta)$

$= (x, y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 旋转变换.

2. 性质

① $\theta \in V$. $f(\theta) = f(0\cdot\alpha) = 0\cdot f(\alpha) = \theta$

$\alpha \in V$, $-\alpha \in V$.

② $f(-\alpha) = -f(\alpha)$. $\theta = f(\alpha + (-\alpha)) = f(\alpha) + f(-\alpha)$

③ 若 $\alpha_1 \dots \alpha_m$ 线性相关, 则 $f(\alpha_1) \dots f(\alpha_m)$ 相关.

存在不全为0的 $k_1 \dots k_m$, $\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i = \theta$.

则有 $f(\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^m k_i f(\alpha_i) = \theta$, $k_1 \dots k_m$ 不全为0.

但 $\alpha_1 \dots \alpha_m$ 无关, $f(\alpha_1) \dots f(\alpha_m)$ 不一定.

对 V 的基 $\alpha_1 \dots \alpha_n$, 线性映射后 $f(\alpha_1) \dots f(\alpha_n)$.

有 $f(V)$ 构成 V 的子空间.

$f(\alpha_1) \dots f(\alpha_n)$ 不一定为 $f(V)$ 的基 (可能相关).

但取 $f(\alpha_1) \dots f(\alpha_n)$ 的极大无关组, 构成基.

④ 线性变换在一组基下的矩阵.

对 $\alpha_1 \dots \alpha_n$ 为基. $f(\alpha_i) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ 在基下的坐标.

$(f(\alpha_1) \dots f(\alpha_n)) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)A$. 线性变换在基 α 下的矩阵

$f(\alpha) = x_1 f(\alpha_1) + \cdots + x_n f(\alpha_n)$ 基下的坐标

$= (f(\alpha_1) \cdots f(\alpha_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\| $

$(\alpha_1 \dots \alpha_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\therefore A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ (相同基的坐标变换)

例. $f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 取第一列 自然基下

$= (e_1 \ e_2 \ e_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 用基表示. 自然基下的坐标.

$(f(e_1) \ f(e_2) \ f(e_3)) = (e_1 \ e_2 \ e_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

例. $\mathscr{A}: x \to Ax$. 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

设 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵为 B.

$\mathscr{A}(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

$\therefore \mathscr{A}(e_1 \dots e_n) = A(e_1 \dots e_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$.

即 $B = A$.

例. $\alpha_1 = (2,3,5)^T$, $\alpha_2 = (0,1,2)^T$, $\alpha_3 = (1,0,0)^T$.

$\beta_1 = (1,2,0)^T$, $\beta_2 = (2,4,-1)^T$, $\beta_3 = (3,0,5)^T$.

$\mathscr{A}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的矩阵.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基的矩阵.

(1) $\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3$

$\beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3$

$\beta_3 = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3$

$\therefore (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)A$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)^{-1}(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$.

$* \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} A$, 不可用 α^{-1} 求, 但 A 同.

$\mathscr{A}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ★ $\beta = \alpha A$. 变换的表示.

$A = \alpha^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \dots$

(2) ① 对两组基 $\alpha_1 \dots \alpha_n$, $\beta_1 \dots \beta_n$,

$(\beta_1 \dots \beta_n) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)T$, $T = (t_{ij})_{n\times n}$,

有 $\beta_i = \sum_{j=1}^n t_{ji}\alpha_j$.

$\therefore f(\beta_i) = f(\sum_{j=1}^n t_{ji}\alpha_j) = \sum_{j=1}^n t_{ji} f(\alpha_j)$,

记 $(f(\beta_1), f(\beta_2) \dots f(\beta_n)) = (\beta_1 \dots \beta_n)B$,

$(f(\alpha_1), f(\alpha_2) \dots f(\alpha_n)) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)A$.

$\therefore (f(\beta_1) \dots f(\beta_n)) = (f(\alpha_1) \dots f(\alpha_n))T$

$= (\alpha_1 \dots \alpha_n)AT$.

又 $(f(\beta_1) \dots f(\beta_n)) = (\beta_1 \dots \beta_n)B$

$= (\alpha_1 \dots \alpha_n)TB$.

$\therefore$ 有 $AT = TB$, $B = T^{-1}AT$. A, B 相似.

② 设变换 f 在 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的矩阵为 A.

在 (e_1, e_2, e_3) 下的矩阵为 B.

所谓在自然基下的坐标是它本身.

e 下坐标 $X \xrightarrow{BX} Y$

$\alpha = eX$ $\quad f(\alpha) = eY$.

其向量 $\alpha \xrightarrow{\alpha A} f(\alpha)$

$e \xrightarrow{eB} f(\alpha)$

$\therefore \beta_i = B\alpha_i$, $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = B(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$.

$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$

$(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)A$

例. $V = F^{2\times2}$. $\mathscr{A}M = AM$. $M \in V$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

$\mathscr{A}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$

$\mathscr{A}e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + 0e_2 + 3e_3 + 0e_4$

$\mathscr{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathscr{A}e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathscr{A}e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{A}(e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$f'\alpha$

二. 特征值与特征向量

1. 引入 (1) 方阵相似, $A = T^{-1}BT$, 取 $B = \lambda I$, 设 T 的列为 $T_1 \dots T_n$, 则 $A(T_1 \dots T_n) = (T_1 \dots T_n)B = (\lambda T_1 \dots \lambda T_n)$, $\therefore$ 有 $AT_i = \lambda T_i$.

(2) 线性变换 $f: \alpha \to \lambda\alpha$, f 在 α 下的矩阵 A, 记 $f(\alpha)$ 的坐标为 Y, α 的坐标为 X, 有 $Y = AX$, 同时对 $f(\alpha) = \lambda\alpha$, 有 $Y = \lambda X$, $\therefore$ 需对应坐标 X 满足 $AX = \lambda X$.

2. 定义 (1) 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵, 如果 $\exists\lambda \in F$, $\exists x \neq \theta$, 使得 $Ax = \lambda x$, 则 λ 为 A 的特征值, x 为特征向量.

(2) 设 V 为 F 上空间, f 为 V 上的线性变换, 如果 $\exists\lambda \in F$, $\exists\alpha \neq \theta$, 使得 $f(\alpha) = \lambda\alpha$, 则 λ 为 f 的特征值, α 为特征向量.

3. 存在性

① 方阵 A 有特征值, $\exists\lambda$ 满足 $Ax = \lambda x$.

$\Leftrightarrow \exists x \neq \theta$, 使 $(\lambda I_n - A)x = \theta$

$\Leftrightarrow (\lambda I_n - A)x = \theta$ 有解

$\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.

$|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$ $\quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

$= \lambda^n + (-\operatorname{tr}A)\lambda^{n-1} + \cdots + \underbrace{(-1)^n \det A}_{\text{取}\lambda=0} = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda)$ 为特征多项式,

特征值 λ 即为 $p_A(\lambda) = 0$ 的根.

* 解的存在与数域相关. 数域 F: $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, 不一定相同. $p_A(\lambda) \neq p_B(\lambda)$, 一定不同.

$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$,

在复数域上一定能分解.

故 A 可逆 $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ 特征值都非零.

② 已知特征值 λ, 则特征向量满足

$\{x \mid Ax = \lambda x, \ x \in F, \ x \neq \theta\}$.

$x \neq \theta$, 严格上不构成子空间.

定义为 F^n 的特征子空间

加上0后, $(\lambda I_n - A)X = \theta$, X 为解空间.

例. 求 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值, 向量.

先求特征值, 用特征多项式.

$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2$.

故 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ 为 A 的特征值.

对 $\lambda_1 = 0$, $Ax = \lambda x$,

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解得 $x_1 = x_2 = x_3$, 有非零解.

故特征向量为 $c_1(1,1,1)$, $(c_1 \neq 0)$.

特征子空间 $\{c_1(1,1,1) \mid c_1 \in C\}$.

对 $\lambda_2 = 1$, $(\lambda I_n - A)x = \theta$.

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad c_2, c_3$ 不全为0.

特征向量 $c_2(1,2,0)^T + c_3(0,-2,1)^T$.

特征子空间 $\{c_2(1,2,0)^T + c_3(0,-2,1)^T\}$.

4. 性质

① λ 为 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ 为 A^T 特征值.

$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - A^T| = 0$.

② λ 为 A 的特征值, λ^k 为 A^k 特征值.

$A^k x = A(A^{k-1}x) = \lambda(A^{k-1}x) = \cdots = \lambda^k x$.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

λ 为 A 特征值, 则 $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 特征值.

$f(A)x = a_0 I x + a_1 AX + \cdots + a_n A^n X$

$= a_0 X + a_1 \lambda X + \cdots + a_n \lambda^n X = f(\lambda)X$.

③ $\frac{1}{\lambda}\det(A)$ 为 A^* 的特征值.

$AA^* = \det(A)I_n$.

$\because \det(\lambda I - A) = 0$, $\therefore \det(A^*)\det(\lambda I - A) = 0$,

即 $\det(\lambda A^* - A^*A) = \det(\lambda(A^* - \frac{1}{\lambda}A^*A))$

$= \lambda^n \det(A^* - \frac{1}{\lambda}\det(A)I) = 0$.

④ 如果实方阵 $AA^T = I$, 则 $|\lambda| = 1$.

$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda AA^T - A)$

$= \det(\lambda A(A^T - I)) = 0$.

方程 $|xI - A^T| = 0$, $\lambda = 1$ 为 A^T, A 特征值.

$Ax = \lambda x$, $x^T A^T = \lambda x^T$.

$\bar{x}^T A^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$, $\therefore \bar{x}^T A^T A x = \bar{\lambda}\bar{x}^T \cdot \lambda x = |\lambda|^2 \bar{x}^T x$

$\therefore \bar{x}^T I x = |\lambda|^2 \bar{x}^T x$, $\therefore |\lambda| = 1$. $(x \neq 0)$.

④ 若 A 与 B 相似, 则 A, B 有相同的特征多项式.

相似 $\Rightarrow B = T^{-1}AT$. $p_B(\lambda) = |\lambda I_n - T^{-1}AT|$

$|\lambda I - T^{-1}AT| = |T||\lambda I_n - T^{-1}AT||T^{-1}|$

$= |T(\lambda I_n - T^{-1}AT)T^{-1}| = |\lambda I_n - A|$.

5. 用矩阵求线性变换的特征值.

① f 在 α 下矩阵为 A

$f(\alpha) = \lambda\alpha$, $Y = \lambda X$: $f(\alpha) \xleftrightarrow{\text{基}} Y$, $\alpha \longleftrightarrow X$; $Y = AX$

$\therefore \lambda X = AX$, f 的特征值与 A 特征值一致.

② 如果 λ 是特征值, 则 $\{\alpha \in V \mid f(\alpha) = \lambda\alpha\}$ 构成 V 的子空间 $V_f(\lambda)$. 同时其坐标满足 $\{X \in F^n \mid AX = \lambda X\} = V_A(\lambda) \subseteq F^n$.

例. $V = F^{2\times2}$. $f: M \to AM$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 求 f 的全部特征值, 特征向量.

求特征值 ← 求特征多项式 ← 找矩阵 ← 找基, 表示 f 在基上的矩阵.

取基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = (\quad)$ ...

$f(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

f 在 $\alpha_1 \dots \alpha_4$ 下的矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

根据特征多项式求 B 的特征值

$\det B = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, f 特征值.

根据特征值求特征向量.

对 $\lambda_1 = 1$, $(\lambda_1 I - B)X = \theta$ 解系.

基下坐标. $x_1 = (1,0,0,0)^T$, $x_2 = (0,1,0,0)^T$.

基 ↓ 向量. B 的特征向量 $c_1 x_1 + c_2 x_2$.

f 的特征向量 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$, $(\lambda_2 I - B)X = \theta$ 解系.

B 的特征向量 $c_3(1,0,1,0)^T + c_4(0,1,0,1)^T$

f 的特征向量 $c_3(\alpha_1 + \alpha_3) + c_4(\alpha_2 + \alpha_4)$

$= \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$

★ 方阵 A 可逆, 且 A 有特征值, 则0不为特征值 (在数域 F 上).

假设0为特征值, $Ax = 0x$, 则 $x = 0$.

若0为 A 的特征值, 则 A 不可逆.

$Ax = 0x$, 存在一组全为0的向量, 不可逆.

三. 矩阵的相似对角化

引例: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 能否相似于对角阵?

1. 矩阵相似于对角阵

① 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明 ($\Rightarrow$) 若 A 可对角化, 则存在可逆 T, 使 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, λ_i 为 A 的特征值.

令 $T = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$. T 可逆, 列向量线性无关.

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $AT = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

即 $A(\alpha_1 \dots \alpha_n) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$(A\alpha_1 \dots A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1 \dots \lambda_n\alpha_n)$

即 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$, α_i 为特征向量.

证明: ($\Leftarrow$) A 有 n 个线性无关的特征向量.

设为 $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, 满足 $A\alpha = \lambda\alpha$.

即 $A(\alpha_1 \dots \alpha_n) = (A\alpha_1 \dots A\alpha_n)$

$= (\lambda_1\alpha_1 \dots \lambda_n\alpha_n)$

$= (\alpha_1 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

则记 $T = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$, α 无关, T 可逆,

$AT = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

即 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

② 设 $\lambda_1 \dots \lambda_k$ 为 A 的互异特征值, $\alpha_1 \dots \alpha_k$ 为不同 λ 的特征向量, 则 $\alpha_1 \dots \alpha_k$ 线性无关.

证明: [证线性无关 $\Rightarrow \mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_k\alpha_k = 0$ 仅有零解.]

数归 $k = 1$ 时, $\mu_1\alpha_1 = \theta$. $\alpha_1 \neq \theta$. 则 $\mu_1 = 0$.

$k-1$ 时, 假设 $\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}$ 线性无关,

$\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\alpha_{k-1} = \theta$ 仅有零解.

则 k 时, 对 $\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\alpha_{k-1} + \mu_k\alpha_k = \theta$,

$\because A(\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\alpha_{k-1} + \mu_k\alpha_k)$

$= \mu_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\lambda_{k-1}\alpha_{k-1} + \mu_k\lambda_k\alpha_k = \theta$,

又 $\lambda_k(\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\alpha_{k-1} + \mu_k\alpha_k)$

$= \mu_1\lambda_k\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\lambda_k\alpha_{k-1} + \mu_k\lambda_k\alpha_k = \theta$.

相减得 $\mu_i(\lambda_k - \lambda_i)\alpha_i = \theta$.

又 $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$, $\therefore \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k-1} = 0$.

$\therefore \mu_k\alpha_k = 0$, $\alpha_k \neq 0$, $\mu_k = 0$.

$\therefore \alpha_1 \dots \alpha_k$ 线性无关.

③ 若 A 相似于 B, 则求 T 使 $T^{-1}AT = B$.

由②, 取 A 的 n 个特征值, 对每个特征值对应一个特征向量 α, 则 $\alpha_1 \dots \alpha_n$ 线性无关.

由①, 令 $T = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ 即可.

*若 n 阶方阵有 n 个特征值, 则可对角化.

2. 特征值的代数重数, 几何重数.

① 定义: 设 A 的所有特征值为 $\lambda_1 \dots \lambda_k$. 范围为复数域, 合并相同有 $k < n$.

I. 对 $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ 的分解, $n_1 + \cdots + n_k = n$, n_i 为 λ_i 的代数重数.

II. 对 $\forall\lambda_i$, 作为特征值满足 $Ax_i = \lambda_i x_{im}$ 即满足方程 $(\lambda_i I_n - A)x = \theta$, 解为 λ_i 特征向量 $x_{im_1} \dots x_{im_k}$, 构成特征子空间 V_A,

$\dim V_A = n - \operatorname{rank}(x_{im_1} \dots x_{im_k}) = m_i$, λ_i 几何重数.

② 关系: 几何重数 $m_i \leq$ 代数重数 n_i.

*. 如果 A 的 n 个特征值 λ 互异, 则对 λ_i 的几何重数 = 代数重数 = 1.

③ 应用: 复方阵 A 可对角化的充要条件是 A 的每个特征值, 几何重数 = 代数重数.

证明: [首先证明, 特征值 λ_i 的特征向量组 $\alpha_{i1} \dots \alpha_{im_i}$ 线性无关, 则各特征值 λ 的特征向量组 $\alpha_{11} \dots \alpha_{1m_1}, \dots, \alpha_{k1} \dots \alpha_{km_k}$ 都是线性无关的向量组.]

$m_j = 1$ 时, 根据引理1②, $\alpha_{11} \dots \alpha_{k1}$ 无关.

$m_j = r - 1$ 时, 假设对 $\forall j \in [1, k]$, 都有 $\mu_{j1}\alpha_{j1} + \cdots + \mu_{jr-1}\alpha_{jr-1} = \theta$.

则 $m_j = r$ 时, 假设 $\mu_{j1}\alpha_{j1} + \cdots + \mu_{jr}\alpha_{jr} = 0$.

$\because A(\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\alpha_{k-1} + \mu_k\alpha_k)$

$= \mu_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\lambda_{k-1}\alpha_{k-1} + \mu_k\lambda_k\alpha_k = \theta$,

又 $\lambda_k(\mu_1\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\alpha_{k-1} + \mu_k\alpha_k)$

$= \mu_1\lambda_k\alpha_1 + \cdots + \mu_{k-1}\lambda_k\alpha_{k-1} + \mu_k\lambda_k\alpha_k = \theta$.

相减得 $\mu_i(\lambda_k - \lambda_i)\alpha_i = \theta$.

又 $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$, $\therefore \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k-1} = 0$.

$\therefore \mu_k\alpha_k = 0$, $\alpha_k \neq 0$, $\mu_k = 0$.

$\therefore \alpha_1 \dots \alpha_k$ 线性无关.

共有线性无关特征向量:

$m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 个 $\leq n$.

又 $n_1 + \cdots + n_k \leq n$, $m_i \leq n_i$, $\therefore m_i = n_i$.

3. 相似于上三角矩阵.

任何一个复方阵 A 都可以相似于一个上三角形矩阵, 且该上三角形矩阵主对角线上元素为其特征值.

证明: $n = 1$ 时, 显然成立.

假设 $n-1$ 时命题成立.

则对 n 阶方阵 A, 设 λ_1 为一个特征值, x_1 为属于 λ_1 的一个特征向量,

将 x_1 扩充为 C^n 的一组基 $x_1, \dots, x_n$.

令 $T = (x_1, \dots, x_n)$, 则 T 可逆.

$Ax_1 = \lambda_1 x_1$.

$AT = A(x_1 \dots x_n) = (\lambda_1 x_1, Ax_2 \dots Ax_n)$

$= (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ $n-1$ 阶方阵.

$\therefore T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$.

根据假设, 对 $n-1$ 阶方阵 A_1, $\exists T_1$ 可逆 使 $T_1^{-1}A_1T_1$ 形成上三角阵.

$\therefore$ 取 $S = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$.

$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix}(T^{-1}AT)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_1^{-1}A_1T_1 \end{pmatrix}$.

例. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+2y \\ x-3z \\ 2y-z \end{pmatrix}$. 是否存在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下使矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$f(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

取基 (e_1, e_2, e_3).

$f(e_1 \ e_2 \ e_3) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

相似不变量. $\operatorname{tr} A = 1 + 1 + 1 = 3$. $\quad \operatorname{tr} = 0$.

不相似, 不存在基.

例. A 的特征值 $\lambda_1 \dots \lambda_n$. 求 $I + A$ 的特征值与 $\det(A + I)$.

$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

$p_{I+A}(\lambda) = \det(\lambda I_n - I_n - A) = \det((\lambda - 1)I_n - A)$

$= (\lambda - 1 - \lambda_1) \cdots (\lambda - 1 - \lambda_n)$

$\therefore$ 特征值 $1 + \lambda_1 \dots 1 + \lambda_n$. $\det = (\lambda_1 + 1) \cdots (\lambda_n + 1)$

例. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵,

求 x, y 满足的条件.

(1) 存在 n 个互异的特征值

则必有 n 个特征向量无关.

其 $\det = (\lambda - 1)(\lambda^2 - x)$.

$x \neq 1$. $x \neq 0$. y 任意.

(2) 不存在, 从特征值中找 n 个无关

$x = 1$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

可对角化 ⇒ 等于几何重数

$\lambda = 1$ 时, 几何重数为2,

需要 $\operatorname{rank}(I - A) = 1$.

$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to 1$. $\checkmark$

$(\operatorname{rank}(\lambda_1 I_3 - A) + \operatorname{rank}(\lambda_3 I - A) = n)$.

$x = 0$. ...

例. $\operatorname{rank}(A + I) + \operatorname{rank}(A - I) = n$. 证明: $A^2 = I$.

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A + I & 0 \\ 0 & A - I \end{pmatrix} = n$. $= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}(A + I) + \operatorname{rank}(A - I) = n$.

① 若 $\operatorname{rank}(A + I) = n$, 则 $\operatorname{rank}(A - I) = 0$

$A = I$, 则 $A^2 = I$.

② $\operatorname{rank}(A - I) = n$ 同理.

③ $0 < \operatorname{rank}(A + I) < n$. 特征值 ±1.

$\det(A + I) = 0$, $\det(A - I) = 0$.

1 对应基 $x_1 \dots x_r$, -1 对应基 $x_{r+1} \dots x_n$. 线性无关.

取 $T = (x_1 \dots x_r \ x_{r+1} \dots x_n)$.

$AT = (Ax_1 \dots Ax_r \ Ax_{r+1} \dots Ax_n)$

$= (x_1 \dots x_r \ -x_{r+1} \dots -x_n)$.

$= (x_1 \dots x_r \ x_{r+1} \dots x_n)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

$= T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

$A = T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}$. $A^2 = I$.