欧氏空间

2021年12月14日 星期二　上午9:54

一、内积

1. 引入：$\mathbb{R}^3\ \{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.
   满足数乘、加法
   有基、线性变换.
   "内积"
   几何上的 $\mathbb{R}^3$，加上度量.
   有长度、面积、体积…
   $\Rightarrow$ 内积 $(\vec a,\vec b)=|\vec a||\vec b|\cos\theta$.
   满足 ① 对称性 (α,β) 换.
   ② 线性性.
   ③ 正定性 $(\alpha,\alpha)\geq 0$，取 $0 \Leftrightarrow \alpha=\theta$.
2. 定义：存在内积的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.
3. 性质. $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.　$\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

例. $\mathbb{R}^{m\times n}$：$\mathbb{R}$ 上所有 $m\times n$ 矩阵构成的线性空间
定义一个内积，拓展为欧氏空间.
det. rank. tr. λ $\rightarrow$ 选 $tr(A)$.
满足 ① $(A,B)=tr(A^TB)=tr(B^TA)=(B,A)$.
② $(\lambda A,B)=tr(\lambda AB)=\lambda tr(AB)=\lambda(A,B)$.
$(A+C,B)=tr((A+C)^TB)=tr(A^TB+C^TB)$
$=(A,B)+(C,B)$
③ 正定性 $(A^T,A)=tr(A^TA)=\sum_{i=1}\sum_{j=1}a_{ij}^2\geq 0$.
当且仅当 $A=\theta$ 时，$(A^T,A)=0$.

例. $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上连续函数全体.
/ $\mathbb{R}[x]$ 是关于 x 的所有多项式全体.
定义 $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$.
$\mathbb{R}_n[x]$ 是次数不超过 n 的多项式.
给定 $n+1$ 个实数（互异）$a_1\ldots a_{n+1}\in\mathbb{R}$.
取 $(f,g)=\sum_{i=1}^{n+1}f(a_i)g(a_i)$.
满足 ① 对称. ② 线性.
③ 正定. $\sum_{i=1}^{n+1}f(a_i)^2\geq 0$. 取等时，$f(a_i)=0$. n个根，$n+1$个数.

二、度量矩阵

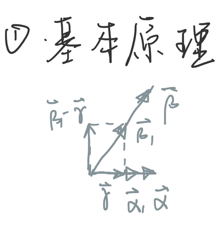
1. 定义.
对有限维的欧氏空间 V，取基 $\alpha_1\ldots\alpha_n$.
对 $\forall\alpha,\beta\in V$，有 $\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$，$\beta=\sum_{i=1}^n y_i\alpha_i$
则内积 $(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n y_j\alpha_j)$
$=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j(\alpha_i,\alpha_j)$.
取矩阵 $G=(g_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&\cdots&&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$　度量矩阵
$\therefore(\alpha,\beta)=(x_1\ldots x_n)G\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.
对 (α,α)，有 $(\alpha,\alpha)=(x_1\ldots x_n)G\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\geq 0$.
且有取等时当且仅当 $\alpha=\theta$，$x_i=0$.

2. 坐标变换与相合关系
基 $(\beta_1\ldots\beta_n)$ 下，$\alpha=(\beta_1\ldots\beta_n)\tilde X=\sum_{i=1}^n\beta_i\tilde x_i$
$\beta=(\beta_1\ldots\beta_n)\tilde Y=\sum_{i=1}^n\beta_i\tilde y_i$.
$(\alpha,\beta)=\tilde X^T\tilde G\tilde Y$，$\tilde G=((\beta_i,\beta_j))_{n\times n}$.
变换关系 $(\beta_1\ldots\beta_n)=(\alpha_1\ldots\alpha_n)T$.
则对坐标，如 $\alpha=(\alpha_1\ldots\alpha_n)X=(\beta_1\ldots\beta_n)\tilde X$，
$\alpha=(\alpha_1\ldots\alpha_n)T\tilde X=(\alpha_1\ldots\alpha_n)X$，$X=T\tilde X$. $X^T=\tilde X^TT^T$
$\therefore(\alpha,\beta)=\tilde X^T\tilde G\tilde Y=X^TGY=(\tilde X^TT^T)G(T\tilde Y)$
$=\tilde X^T(T^TGT)\tilde Y$，$\therefore\tilde G=T^TGT$.
定义 $\tilde G=T^TGT$ 满足相合. 取 $\tilde X=e_i$，$\tilde Y=e_j$.
$\tilde G=(a_{ij})_{n\times n}$，$T^TGT=(b_{ij})_{n\times n}$.
$e_i\tilde Ge_j=e_iT^TGTe_j$，$a_{ij}=b_{ij}$.

3. 性质：可逆.
证明：可逆 $\Leftrightarrow$ rank $G=n$ $\Leftrightarrow$ 行秩、列秩为 n
$\Leftrightarrow$ 各行/列线性无关.
$G=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\(\alpha_n,\alpha_1)&&&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$
验证各个行向量
$k_1((\alpha_1,\alpha_1)\ (\alpha_1,\alpha_2)\cdots(\alpha_1,\alpha_n))+k_2((\alpha_2,\alpha_1)\cdots(\alpha_2,\alpha_n))$
$+\cdots+(k_n(\alpha_n,\alpha_1)\ (\alpha_n,\alpha_2)\cdots(\alpha_n,\alpha_n))=\theta$ 的 k 的解.
行向量线性 $\Leftrightarrow(k_1(\alpha_1,\alpha_1)\ k_1(\alpha_1,\alpha_2)\cdots k_1(\alpha_1,\alpha_n))+\cdots$
$+(k_n(\alpha_n,\alpha_1)\ k_n(\alpha_n,\alpha_2)\cdots k_n(\alpha_n,\alpha_n))=\theta$.
内积线性 $\Leftrightarrow((k_1\alpha_1,\alpha_1)\ (k_1\alpha_1,\alpha_2)\cdots(k_1\alpha_1,\alpha_n))+\cdots$
$+((k_n\alpha_n,\alpha_1)\ (k_n\alpha_n,\alpha_2)\cdots(k_n\alpha_n,\alpha_n))=\theta$.
行向量加 $\Leftrightarrow((\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i,\alpha_1)\ (\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i,\alpha_2)\cdots(\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i,\alpha_n))=\theta$.
记 $\alpha=\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i$，$((\alpha,\alpha_1)\ (\alpha,\alpha_2)\cdots(\alpha,\alpha_n))=\theta$.
则有 $(\alpha,\alpha_i)=0$. $k_i(\alpha,\alpha_i)=0$.
$\therefore\sum_{i=1}^n k_i(\alpha,\alpha_i)=0$，$(\alpha,\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i)=0$，$(\alpha,\alpha)=0$.
内积正定性 $\Rightarrow\alpha=\theta$.
即 $\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i=\theta$. $\alpha_i\neq\theta$，$\therefore k_i=0$.
$\therefore G$ 各行向量线性无关，可逆.

三、标准正交基

1. 定义.
正交向量组：两两正交的非零向量.
正交基：正交向量组成为一组基.
标准正交基：单位向量构成的正交基.
2. 性质：$\alpha_1\ldots\alpha_n$ 两两正交，则构成的正交向量组线性无关（构成基）.
证明：对方程 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=\theta$.
两边同时取与 α_i 的内积，
得到 $(\lambda_1\alpha_1,\alpha_i)+(\lambda_2\alpha_2,\alpha_i)+\cdots=0$.
两两正交，故只有 $\lambda_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$，
其中 $\alpha_i\neq\theta$，$(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0$，故 $\lambda_i=0$，
对 $\forall i\in[1,n]$ 成立.
即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_i=0$.
3. 存在性：取任一组基，都可构造.
① 基本原理.



单位化：$\beta_1=\dfrac{\beta}{|\beta|}$，$\alpha_1=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$.
正交化：作垂直形成 $\vec\gamma$，
$|\vec\gamma|=|\vec\beta_1|\cos\langle\vec\alpha,\vec\beta_1\rangle$
$=|\vec\beta_1|\dfrac{(\vec\alpha_1,\vec\beta_1)}{|\vec\alpha_1||\vec\beta_1|}$
$\vec\gamma=|\vec\gamma|\dfrac{\vec\alpha_1}{|\vec\alpha_1|}=\dfrac{(\vec\alpha_1,\vec\beta_1)}{|\vec\alpha_1||\vec\alpha_1|}\vec\alpha_1$ ($=1$)
$\vec\beta_1-\vec\gamma=\vec\beta_1-(\vec\alpha_1,\vec\beta_1)\vec\alpha_1$.

② 求标准正交基的方法：Schmidt 正交化.
取基 $\alpha_1\ldots\alpha_n$，求正交基.
(1) 对 $\vec\alpha_1$，取单位 $\vec e_1=\dfrac{\vec\alpha_1}{|\vec\alpha_1|}$.
(2) 对 $\vec e_1$、$\vec\alpha_2$ 取垂直向量 $\vec\beta_2$：
$\vec\beta_2=\vec\alpha_2-(\vec e_1,\vec\alpha_2)\vec e_1$.
可验证 $(\vec\beta_2,\vec e_1)=(\vec\alpha_2-(\vec e_1,\vec\alpha_2)\vec e_1,\vec e_1)$
$=(\vec\alpha_2-\frac{1}{|\vec\alpha_1|}(\vec\alpha_1,\vec\alpha_2)\frac{\vec\alpha_1}{|\vec\alpha_1|},\frac{\vec\alpha_1}{|\vec\alpha_1|})$
$=(\vec\alpha_2-\frac{(\vec\alpha_1,\vec\alpha_2)}{|\vec\alpha_1|^2}\vec\alpha_1,\frac{\vec\alpha_1}{|\vec\alpha_1|})=0$，
即 β_2 与 e_1 正交.
及时取单位 $\vec e_2=\dfrac{\vec\beta_2}{|\beta_2|}$.
(3) 对 $\vec e_1$、$\vec e_2$、$\vec\alpha_3$ 取垂直：
$\vec\beta_3=\vec\alpha_3-(\vec e_1,\vec\alpha_3)\vec e_1-(\vec e_2,\vec\alpha_3)\vec e_2$.
可验证 $(\vec\beta_3,\vec e_1)=(\vec\alpha_3-(\vec e_1,\vec\alpha_3)\vec e_1-(\vec e_2,\vec\alpha_3)\vec e_2,\vec e_1)$
$=(\vec\alpha_3-(\vec e_1,\vec\alpha_3)\vec e_1,\vec e_1)=0$，
同理 $(\vec\beta_3,\vec e_2)=0$.
即 β_3 与 $\vec e_1$、$\vec e_2$ 都正交.
及时取单位 $\vec e_3=\dfrac{\vec\beta_3}{|\beta_3|}$.
…
(n) 对 $\vec e_1\ldots\vec e_{n-1}$、$\vec\alpha_n$ 取垂直
$\vec\beta_n=\vec\alpha_n-\sum_{i=1}^{n-1}(\vec e_i,\vec\alpha_n)\vec e_i$. $\vec e_n=\dfrac{\vec\beta_n}{|\beta_n|}$
$\therefore\vec e_1\ldots\vec e_n$ 为标准正交基.

四、线性变换

(1) 正交变换

1. 引入：正交阵.
实方阵 A 满足 $AA^T=I_n$.
可得 A 可逆，$|A|=\pm1$，$A^{-1}=A^T$.（必要条件）
例. I_n.　$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$
记 $A=(\alpha_1\ldots\alpha_n)$，则 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\ldots\alpha_n)=I_n$.
$\therefore\alpha_i^T\alpha_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1,&i=j\\0,&i\neq j.\end{cases}$　列.
$\therefore(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}$. $\longrightarrow(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix})=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. 内积
即对 $A=(\alpha_1\ldots\alpha_n)$，$\alpha_1\ldots\alpha_n$ 是 $\mathbb{R}$ 上的标准正交基.
2. 记 B 是 n 阶实可逆阵 $(\beta_1\ldots\beta_n)$.
则 $\beta_1\ldots\beta_n$ 构成一组基.
$\Rightarrow$ 施密正交化，$\vec\gamma_k=\beta_k-\sum_{i=1}^{k}(\beta_k,\tilde e_i)\tilde e_i$.
$\therefore(\tilde e_1,\ldots\tilde e_n)=(\beta_1\ldots\beta_n)\begin{pmatrix}\diagdown&\\0&\diagdown\end{pmatrix}$ 上三角.
$\therefore(\beta_1\ldots\beta_n)=(\tilde e_1,\ldots\tilde e_n)\begin{pmatrix}\diagdown&\\0&\diagdown\end{pmatrix}$ 正交阵　上求逆仍上三角.
3. 欧氏空间中 $\alpha_1\ldots\alpha_n$ 为一组标准正交基，
$\beta_1\ldots\beta_n$ 为另一组标准正交基.
若有 $(\beta_1\ldots\beta_n)=(\alpha_1\ldots\alpha_n)T$，$T=(t_{ij})_{m\times n}$.
则 T 为正交矩阵.
证明：$\beta_i=\sum_{k=1}^n t_{ki}\alpha_k$.
$\delta_{ij}=(\beta_i,\beta_j)=(\sum_{k=1}^n t_{ki}\alpha_k,\sum_{l=1}^n t_{lj}\alpha_l)$
$=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n t_{ki}t_{lj}(\alpha_k,\alpha_l)$　$l\neq k$，为0.
$\Rightarrow\sum_{k=1}^n t_{ki}t_{kj}(\alpha_k,\alpha_k)$
即第 i、j 列的 t 列向量求内积
相同列为0，相异列得1.
4. 正交变换等价命题.
① f 在某个标准正交基下的矩阵正交.
② f 在任意标准正交基下均为正交阵.
③ f 将标准正交基变为标准正交基.
④ 对 $\forall\alpha\in V$，$|f(\alpha)|=|\alpha|$.
⑤ 对 $\forall\alpha,\beta\in V$，$(f(\alpha),f(\beta))=(\alpha,\beta)$.
证明：①$\Rightarrow$② 设正交阵 B 是 f 在 $\beta_1\ldots\beta_n$ 下的矩阵.
$\beta=\alpha T$，则 $B=T^{-1}AT$.
$(AB)^TAB=B^TA^TAB=I_n$，$\therefore B^TB=I_n$.
②$\Rightarrow$③ 设 $(f(\alpha_1)\ldots f(\alpha_n))=(\alpha_1\ldots\alpha_n)A$，$A$ 正交.
由②，A 是正交阵. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.
$f(\alpha_i)=\sum_{k=1}^n a_{ki}\alpha_k$，　有 $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$.
$\therefore(f(\alpha_i),f(\alpha_j))=(\sum_{k=1}^n a_{ki}\alpha_k,\sum_{l=1}^n a_{lj}\alpha_l)$
$=\sum_{k=1}^n a_{ki}\sum_{l=1}^n a_{lj}(\alpha_k,\alpha_l)=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ki}a_{lj}\delta_{kl}=\delta_{ij}$.
③$\Rightarrow$④. (α_i,α_j) 在 $\alpha_1\ldots\alpha_n$ 下的度量阵为 I_n.
取 $\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$，则 $(\alpha,\alpha)=(x_1\ldots x_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.
又 $f(\alpha_1)\ldots f(\alpha_n)$ 也是标准正交基，
$f(\alpha)$ 在 $f(\alpha_1)\ldots f(\alpha_n)$ 下坐标为 $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.
$(f(\alpha),f(\alpha))=(x_1\ldots x_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
④$\Rightarrow$⑤ 由④，$|f(\alpha)|=|\alpha|$，则有 $|f(\alpha+\beta)|=|\alpha+\beta|$.
$(f(\alpha+\beta),f(\alpha+\beta))=(f(\alpha)+f(\beta),f(\alpha)+f(\beta))$
$=(f(\alpha),f(\alpha))+2(f(\alpha),f(\beta))+(f(\beta),f(\beta))$
$(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$.
又 $(f(\alpha),f(\alpha))=(\alpha,\alpha)$，$\therefore(f(\alpha),f(\beta))=(\alpha,\beta)$.
⑤$\Rightarrow$① $(f(e_1)\ldots f(e_n))=(e_1\ldots e_n)A$.
$(f(e_i),f(e_j))=(e_i,e_j)=\delta_{ij}$.
$=(\sum_{k=1}^n a_{ki}e_k,\sum_{l=1}^n a_{lj}e_l)$
$=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ki}a_{lj}(e_k,e_l)$.
去掉 $k\neq l$，对调求和得 $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$.
5. 例. 旋转变换、镜面变换.
f $|A|=1$ 第一类.　$|A|=-1$ 第二类.
例. f 为正交变换. A 为其正交阵.
取特征多项式求特征值 $p_f(\lambda)$，
则一定存在复根 λ，$|\lambda|=1$.
（若为实根 λ，$\lambda=\pm1$.）特征值都为1.
若为奇数维，复根成对，
实根奇数个为 ±1. 相乘为1，
则必有为1的实根为特征值.

④ 如果实方阵 $AA^T=I$，则 $|\lambda|=1$.
$\det(\lambda I-A)=\det(\lambda AA^T-A)$
$=\det(\lambda A(A^T-I))=0$.
方程 $|xI-A^T|=0$，$\lambda=1$ 为 A^T、A 特征值.
$Ax=\lambda x$，$x^TA^T=\lambda x^T$.
$\bar x^TA^T=\bar\lambda\bar x$，$\therefore\bar x^TA^TAx=\bar\lambda\bar x^T\cdot\lambda x=|\lambda|^2\bar x^Tx$
$\therefore\bar x^TIx=|\lambda|^2\bar x^Tx$，$\therefore|\lambda|=1$.（$x\neq0$）.

(2) 对称变换.

1. A 为实对称阵，$A^T=A$，$a_{ij}=a_{ji}$.
$(f(\alpha_1)\ldots f(\alpha_n))=(\alpha_1\ldots\alpha_n)A$.
$f(\alpha_i)=(\alpha_1\ldots\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^n a_{ki}\alpha_k$.
$(\alpha_i,f(\alpha_j))=(\alpha_i,\sum_{k=1}^n a_{kj}\alpha_k)=\sum_{k=1}^n a_{kj}(\alpha_i,\alpha_k)=a_{ij}(\alpha_i,\alpha_i)=a_{ij}$
同理，$(f(\alpha_i),\alpha_j)=a_{ji}$.　$\Rightarrow(f(\alpha_j),\alpha_i)=(\alpha_i,f(\alpha_j))$.
2. 若线性变换 f 满足 $(\alpha,f(\beta))=(\beta,f(\alpha))$，则称 f 为 V 上的对称变换.
对称变换 $f\Leftrightarrow$ 标准正交基上为对称阵.
证明：$(\alpha,f(\beta))=(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n y_jf(\alpha_j))$
$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j(\alpha_i,f(\alpha_j))=\sum_{i,j=1}^n x_iy_ja_{ij}$
同理，$(f(\alpha),\beta)=(\beta,f(\alpha))=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y_jx_ia_{ji}$.
则有 $(\alpha,f(\beta))=(f(\alpha),\beta)\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$
3. 实对称阵的特征值都是实数.
证明：先看作复方阵，则必有特征值，
下证特征值均为实数.
$Ax=\lambda x$，则 $\bar A\bar x=\bar\lambda\bar x$.
$\bar x^T(Ax)=\bar x^TA^Tx=(A\bar x)^T=(\bar A\bar x)^Tx$.
$\therefore\lambda\bar x^Tx=\bar\lambda\bar x^Tx$. $\therefore\lambda=\bar\lambda$，是实数.
对称变换 f 不同特征值对应的特征向量相互正交.
证明：λ_1、λ_2 为不同特征值，
$f(\alpha)=\lambda_1\alpha$，$f(\beta)=\lambda_2\beta$.
$(\alpha,f(\beta))=(f(\alpha),\beta)$，$(\alpha,\lambda_2\beta)=(\lambda_1\alpha,\beta)$.
$\lambda_1(\alpha,\beta)=\lambda_2(\alpha,\beta)$　$\Rightarrow(\alpha,\beta)=0$.
此时 $(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n y_j\alpha_j)=0$，
坐标 $(x_1,x_2\ldots x_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=0$，$X$ 与 Y 垂直.
4. 实对称阵 A 可以对角化. 即存在可逆阵 T，使 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 特征值.
证明：λ_1 是 A 的特征值，X_1 为特征向量.
标准化 X_1 为单位向量，从 X_1 出发扩充为一组标准正交基 $X_1\ldots X_n$.
令 $T=(X_1\ldots X_n)$. T 为正交阵.
$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}X_1^T\\\vdots\\X_n^T\end{pmatrix}A(X_1\ldots X_n)$
$=\begin{pmatrix}X_1^T\\\vdots\\X_n^T\end{pmatrix}(AX_1\ldots AX_n)$
$=\begin{pmatrix}X_1^T\\\vdots\\X_n^T\end{pmatrix}(\lambda_1X_1\ldots\lambda_1X_n)$
$=\begin{pmatrix}X_1^T\lambda_1X_1\\X_2^T\lambda_1X_1\\\vdots\\X_n^T\lambda_1X_1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1&0\cdots0\\0&\\\vdots&A_{n-1}\\0&\end{pmatrix}$ 对称. 实对称阵.
数归：假设 A_{n-1} 存在正交阵 T_{n-1}，使 $T_{n-1}^{-1}A_{n-1}T_{n-1}$ 为对角阵.
令 $T=T_n\begin{pmatrix}1&0\\0&T_{n-1}\end{pmatrix}$，
则 $T^{-1}A_nT=\begin{pmatrix}1&0\\0&T_{n-1}^{-1}\end{pmatrix}T_n^{-1}A_nT_n\begin{pmatrix}1&0\\0&T_{n-1}\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1&0\\0&T_{n-1}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\cdots0\\0&A_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&T_{n-1}\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\cdots0\\0&T_{n-1}^{-1}A_{n-1}T_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$
即可得存在正交阵使 $T^{-1}A_nT$ 为对角阵.

求该正交阵 T.
仿照对角化时求 T 的方法，并将求出的基（基础解系）标准正交化.