例题　重开

2021年11月26日 星期五　　上午11:45

一、方程组的解

1. 设 $\alpha_1=(1,0,1,0)$, $\alpha_2=(0,1,0,1)$, 将 α_1,α_2 扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.

S1 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1^T\ \alpha_2^T\ e_1^T\ e_2^T\ e_3^T\ e_4^T)$ 线性相关，已含一组基.

阶梯 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&1\end{pmatrix}$ 前四列线性无关，故 $\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2$ 为基.

S2 替换定理.

$\alpha_1=e_1+0e_2+e_3+0e_4$,

替换 e_1，则 $\alpha_1,\alpha_2,e_2,e_3$ 线性无关.

$\alpha_2=0e_1+e_2+0e_3+e_4$,

替换 e_2，则 $\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_4$ 线性无关.

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2 / \alpha_1,\alpha_2,e_3,e_4$ 线性无关，

分别构成 $\mathbb{R}_4$ 的一组基.

2. $X_1=(1,2,3,4,5)$,
$X_2=(1,-1,1,-1,1)$
$X_3=(1,2,4,8,16)$

求一个齐次线性方程组，使之为基础解系.

设该方程为 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4+a_{i5}x_5=0$.

X为基础解系. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=X_1t_1+X_2t_2+X_3t_3$, t为自由变量，X为线性无关解.

则该基础解系满足 $\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=0\\a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0\\a_1+2a_2+4a_3+8a_4+16a_5=0\end{cases}$

关于 $a_1\ldots a_5$, $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\1&2&3&4&5\\1&2&4&8&16\end{pmatrix}$

解得 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\-4\\1\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}16\\6\\-11\\0\\1\end{pmatrix}t_2$

其中基础解系为 $\alpha_1=(6,1,-4,1,0)$. $\alpha_2=(16,6,-11,0,1)$

维数 $5-\mathrm{rank}\,A=3$，使 X_1,X_2,X_3 构成基.

3. 已知5元线性方程组的系数矩阵的秩为3，且 $X_1=(1,1,1,1,1)$, $X_2=(1,2,3,4,5)$, $X_3=(1,0,-3,-2,-3)$ 是它的解.

(1) 求方程组通解.

(2) $X_1+X_2+X_3$ 是否为解？

(3) $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 是否为解？

(1) 方程 $Ax=b$ 有 $AX_1=b$, $AX_2=b$, $AX_3=b$.

则 $\eta_1=X_2-X_1=(0,1,2,3,4)$, $\eta_2=X_3-X_1=(0,-1,-4,-3,-4)$

对 $Ax=\theta$, $\dim V_A=5-3=2$, 故 η_1,η_2 为一组基.

$V_A=\{t_1\eta_1+t_2\eta_2=(0,t_1-t_2,2t_1-4t_2,3t_1-3t_2,4t_1-4t_2)\}$.

可知 V_A 不包含 X_1，故 $b\neq\theta$.

$Ax=b$ 通解为 $X_1+t_1\eta_1+t_2\eta_2=\ldots$

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=0$

$\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=0\\a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0\\a_1+2a_2+4a_3+8a_4+16a_5=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&-1&1&-1&1\\1&2&4&8&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&-3&-2&-5&-4\\0&0&1&4&11\end{pmatrix}$

$x=X_1t_1+X_2t_2+X_3t_3$

$(1,x-1,(x-1)^2,\ldots,(x-1)^n)=(1,x,x^2,\ldots,x^n)\begin{pmatrix}1&1&1&1&&1\\0&1&-2&3&&-C_n^1\\0&0&1&-3&&C_n^2\\\vdots&\vdots&&-1&\ddots&\vdots\\0&0&&&&(-1)^{n-1}C_n^n\end{pmatrix}$

$C_k^i(-1)^{k-i}x^i$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\0&-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&&-\frac{1}{C_n^1}\\&&1&\frac{1}{2}&&\frac{1}{C_n^2}\\&&&-1&&\vdots\\&&&&\ddots&\frac{(-1)^{n-1}}{C_n^n}\end{pmatrix}$

二、线性相关性

例. 判断 $\begin{cases}x+2y+z=1\\-x+3y+5z=-2\\2x+5y=3\end{cases}$ 是否线性相关.

令 $l_1=x+2y+z-1$, $l_2=-x+3y+5z+2$, $l_3=2x+5y-3$,

假设 $l_3=\lambda_1l_1+\lambda_2l_2$,

$\therefore\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=2\\2\lambda_1+3\lambda_2=5\\\lambda_1+5\lambda_2=0\\-\lambda_1+2\lambda_2=-3\end{cases}\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2$ 有解，则线性相关.

例. $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir})\in F^r$, $i=1,2,\ldots,m$,

加长向量组为 $\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$.

若 $\beta_1\ldots\beta_m$ 线性相关，证明 $\alpha_1\ldots\alpha_m$ 也线性相关.

β 相关 $\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\beta_i=\theta$，对 λ_i 有非零解.

$\therefore\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{m1}\\\vdots&&\vdots\\a_{1r}&\cdots&a_{mr}\\\vdots&&\vdots\\a_{1n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}=0$ 有非零解.

$\therefore\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{m1}\\\vdots&&\vdots\\a_{1r}&\cdots&a_{mr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}=0$ 有非零解.

例. 若 $\alpha_1\ldots\alpha_s$ 能用 $\beta_1\ldots\beta_t$ 线性表示，求证：$\mathrm{rank}\{\alpha_1\ldots\alpha_s\}\le\mathrm{rank}\{\beta_1\ldots\beta_t\}$.

证明：设 $\mathrm{rank}\{\alpha_1\ldots\alpha_s\}=r_1$, $\mathrm{rank}\{\beta_1\ldots\beta_t\}=r_2$

$\alpha_1\ldots\alpha_{r_1}$ 也可用 $\beta_1\ldots\beta_t$ 表示.

$\beta_1\ldots\beta_t$ 可用 $\beta_1\ldots\beta_{r_2}$ 表示.

$\therefore\alpha_1\ldots\alpha_{r_1}$ 可用 $\beta_1\ldots\beta_{r_2}$ 表示.

$\because\alpha_1\ldots\alpha_{r_1}$ 线性无关，$\therefore r_1\le r_2$.

例. 求证：$\mathrm{rank}\{\alpha_1+\beta_1\ \ldots\ \alpha_s+\beta_s\}\le\mathrm{rank}\{\alpha_1\ldots\alpha_s\}+\mathrm{rank}\{\beta_1\ldots\beta_s\}$

证明：$\alpha_1+\beta_1\ldots\alpha_s+\beta_s$ 可用 $\alpha_1\ldots\alpha_s$. $\beta_1\ldots\beta_s$ 表示.

分别设为 r_0. r_1. r_2.

$\alpha_1\ldots\alpha_s$ 可用 $\alpha_1\ldots\alpha_{r_1}$ 表示,

$\beta_1\ldots\beta_s$ 可用 $\beta_1\ldots\beta_{r_2}$ 表示,

$\alpha_1+\beta_1\ldots\alpha_s+\beta_s$ 可用 $\alpha_1+\beta_1\ldots\alpha_{r_0}+\beta_{r_0}$ 表示.

$\therefore$ 有 $\alpha_1+\beta_1\ldots\alpha_{r_0}+\beta_{r_0}$ 可用 $\alpha_1\ldots\alpha_{r_1}$ 与 $\beta_1\ldots\beta_{r_2}$ 表示.

又各组线性无关，$\therefore r_0\le r_1+r_2$.

例. 求证：$\mathrm{rank}(AB)\le\min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$.

证明：设 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$, $B_{n\times l}$.

$AB=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\vdots\\\gamma_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_n\\a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_n\\\vdots\\a_{m1}\beta_1+a_{m2}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_n\end{pmatrix}$

$\therefore$ 对于关于 a_{ij} 的方程组有非零解.

即 $\gamma_1\ldots\gamma_m$ 可用 $\beta_1\ldots\beta_m$ 表示.

由上例结论得 $\mathrm{rank}(AB)\le\mathrm{rank}(B)$.

又对 A，有 $\mathrm{rank}(B^TA^T)\le\mathrm{rank}(A^T)$,

$\therefore\mathrm{rank}(AB)$ 同时 $\le A$.

三、线性空间

例. 平面直角坐标系逆时针旋转 θ.

记 X 轴. Y 轴变换前是 e_1,e_2，变换后是 e_1',e_2'，则坐标关系为＿＿.

逆时针旋转 θ：$(e_1',e_2')=(e_1\ e_2)\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

对 $\forall\alpha=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

$=(e_1'\ e_2')\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$.

坐标 $\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

例. 说明 V 是否是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，是则求 V 的一组基与维数.

(1) $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=0\}$.

(2) $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=0$，且有 $2x_1-x_2+x_3=3\}$.

(1) 首先 V 显然非空.

取 $\forall\alpha_1,\alpha_2\in V$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.

设 $\alpha_1=(x_1,x_2,x_3)$, $\alpha_2=(y_1,y_2,y_3)$,

则有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=(\lambda_1x_1+\lambda_2y_1,\ldots,\lambda_1x_3+\lambda_2y_3)$.

$\because\lambda_1(x_1+x_2+x_3)+\lambda_2(y_1+y_2+y_3)=0$,

$\therefore\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=0$, $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\in V$.

$\therefore V$ 为 F^n 的子空间.

易验证 $(-1,1,0)$. $(-1,0,1)$ 是 V 的一个线性无关组，且对 $\forall x\in(x_1,x_2,x_3)\in V$,

有 $x=x_2(-1,1,0)+x_3(-1,0,1)$,

$\therefore(-1,1,0)$. $(-1,0,1)$ 是一组基，

且 $\dim V=2$.

(2) 首先 V 显然非空.

对 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)\neq\theta$，取 $\lambda=2$

$2\alpha=(2x_1,2x_2,2x_3)=(y_1,y_2,y_3)$,

则有 $2y_1-y_2+y_3=2\times3=6\notin V$.

$\therefore V$ 不为 F^n 的子空间.

例. 判断如下命题

(1) W 是 $F_n[x]$ 中满足 $p(-x)=p(x)$ 的多项式全体，则 W 是 $F_n[x]$ 的子空间，且 $W=\langle1,x^2,\ldots,x^{2m}\rangle$，其中 $m=[\frac{n}{2}]$.

设 $p,q\in W$，则 $p(-x)=p(x)$, $q(-x)=q(x)$.

$\therefore(p+q)(-x)=p(-x)+q(-x)=p(x)+q(x)=(p+q)(x)$.

$(\lambda p)(-x)=\lambda p(-x)=\lambda p(x)=(\lambda p)(x)$.

$\therefore$ W 对加法、数乘封闭，为子空间.

W 中多项式为偶函数，

即 $W=a_0+a_2x^2+\cdots+a_{2m}x^{2m}$, $m=[\frac{n}{2}]$,

$\therefore W=\langle1,x^2,\ldots,x^{2m}\rangle$.

例. 设 C_n 是由三角多项式构成的线性空间，求向量组 $S=\{1,\cos x,\sin x,\sin^2x,\cos^2x,\sin2x,\cos2x\}$ 的极大无关组.

$C_n=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos2\theta+b_2\sin2\theta+\cdots+a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)$

$S=\{1,\cos x,\sin x,\sin^2x,\cos^2x,\sin2x,\cos2x\}$

$=\{1,\cos x,\sin x,\frac{1-\cos2x}{2},\frac{1+\cos2x}{2},\sin2x,\cos2x\}$.

$\therefore S$ 等价于 $S_1=\{1,\cos x,\sin x,\sin2x,\cos2x\}$.

下证 S_1 线性无关.

设 $a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos2x+b_2\sin2x=0$,

令 $x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$，得

$\begin{cases}a_0+a_1+a_2=0\\a_0+\frac{\sqrt2}{2}a_1+\frac{\sqrt2}{2}b_1+b_2=0\\a_0+b_1-a_2=0\\a_0-\frac{\sqrt2}{2}a_1+\frac{\sqrt2}{2}b_1-b_2=0\\a_0-a_1+a_2=0\end{cases}\Rightarrow a_0=a_1=a_2=b_1=b_2=0$

$\therefore\{1,\cos x,\sin x,\sin2x,\cos2x\}$ 构成极大无关组.

例. 设线性空间 V 的向量组 S 含 m 个向量，且其秩为 r. 在 S 中任取 s 个向量组成向量组 T，证明：$\mathrm{rank}(T)\ge r+s-m$.

$r\le m$. $r-m\le0$.

$r+s-m\le0$ 时，显然成立.（T中元素很少）

否则，设 S 的一组极大无关组为 S_1,

则 S_1 中含有 r 个向量.

T 至少含有 $\underset{总数}{s}-\underset{不在T中的S_1的元素}{\underbrace{(m-r)}}=r+s-m$ 个 S_1 中的向量.
（$\underbrace{m-r}$ 下注：秩，S_1中　在T中但不在S_1中；s-(m-r) 上注：可表示的量）

这 $r+s-m$ 个向量线性无关，$\therefore\mathrm{rank}\,T\ge r+s-m$.

例. C 是复数域 R 上构成的线性空间，求它的基与维数.

a_1+b_1i　$a+bi$.　$1.\ i.\ \to$ 验证是基

例. 证明多项式集合 F 无有限维.

假设有限维 n.

$\{1,\ldots,x^n\}$ 无关.　假设 $n+1$. x.

例. $F^{m\times n}$ 的基与维数.

E_{ij}. $m\times n$ 个.

四、变换.

例. $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 下矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}$

求 $\mathscr{A}$ 在 $\beta_1.\beta_2.\beta_3$ 下的矩阵.

(1) $\beta_1=\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_1$, $\beta_3=\alpha_2$.

(2) $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_2-\alpha_3$.

$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\mathscr{A}\alpha_1\ \mathscr{A}\alpha_2\ \mathscr{A}\alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$.

(1) $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)T_1$

$\mathscr{A}(\beta_1\beta_2\beta_3)=\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T_1$

$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)AT_1$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)T_1^{-1}AT_1$.

$B_1=T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&1&5\\1&2&3\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&1\\3&1&2\\3&-1&0\end{pmatrix}$

(2) $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T_2$

$\mathscr{A}(\beta_1\beta_2\beta_3)=\mathscr{A}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)T_2$

$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)AT_2$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)T_2^{-1}AT_2$

$B=T_2^{-1}AT_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\\frac12&\frac12&4\\-3&-\frac12&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5&0\\\frac12&\frac92&-\frac72\\-\frac32&-\frac32&\frac12\end{pmatrix}$

例. 在 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基

$\alpha_1=(1,0,1)$, $\alpha_2=(2,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,1)$

$\beta_1=(2,3,1)$, $\beta_2=(7,9,5)$, $\beta_3=(3,4,3)$.

定义线性变换 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 下的矩阵.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 下的矩阵.

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在 $e_1.e_2.e_3$ 下的矩阵.

(1) $\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

$\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}A$,

$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-7&-4\\-2&-4&4\\0&3&2\end{pmatrix}$

(2) $\mathscr{A}(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$

$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)AA$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)A^{-1}AA$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)B$.　即 $B=A$.

(3) $\mathscr{A}(e_1\ e_2\ e_3)=\mathscr{A}((\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-1})$

$=\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$

$=(e_1\ e_2\ e_3)(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$.

即 $C=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$.

1. 以四个线性无关的函数

$\alpha_1=e^{ax}\cos bx$, $\alpha_2=e^{ax}\sin bx$, $\alpha_3=xe^{ax}\cos bx$, $\alpha_4=xe^{ax}\sin bx$ 为基的四维空间中，作微分变换，求在此基下的矩阵.

$\mathscr{A}(\alpha_1)=\alpha_1'=(ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx)$

$=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)=a\alpha_1-b\alpha_2$.

$\mathscr{A}(\alpha_2)=\alpha_2'=b\alpha_1+a\alpha_2$.　对基分别变换.

$\mathscr{A}(\alpha_4)=\alpha_4'=e^{ax}\sin bx+x(ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx)$

$=e^{ax}(\sin bx+ax\sin bx+bx\cos bx)$

$=\alpha_2+a\alpha_4+b\alpha_3$

$\mathscr{A}(\alpha_3)=\alpha_1+a\alpha_3-b\alpha_4$.

$\therefore\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}a&b&1&0\\-b&a&0&1\\0&0&a&a\\0&0&-b&b\end{pmatrix}$

2. 给定2阶实方阵A，求2阶实方阵构成的线性空间上的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(X)=AX-XA$ 在基 $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$　$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$

$\mathscr{A}(e_1)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-a_{12}\\a_{21}&0\end{pmatrix}$

$=-a_{12}e_2+a_{21}e_3$

$\mathscr{A}(e_2)=-a_{21}e_1+(a_{11}-a_{22})e_2+a_{21}e_4$.

$\mathscr{A}(e_3)=a_{12}e_1+(a_{22}-a_{11})e_3-a_{12}e_4$

$\mathscr{A}(e_4)=a_{12}e_2-a_{21}e_3$.

$\therefore\mathscr{A}(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)=(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)\begin{pmatrix}0&-a_{21}&a_{12}&0\\-a_{12}&a_{11}-a_{22}&0&a_{12}\\a_{21}&0&a_{22}-a_{11}&-a_{21}\\0&a_{21}&-a_{12}&0\end{pmatrix}$

3. n维线性空间中，$\mathscr{A}:V\to V$ 为线性变换，若存在 $\alpha\in V$，使 $\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)\neq0$，但 $\mathscr{A}^n(\alpha)=0$，证明：$\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$

证明：取基 $\underline{\alpha_1=\mathscr{A}^{n-1}(\alpha),\ \alpha_2=\mathscr{A}^{n-2}(\alpha),\ldots,\alpha_{n-1}=\mathscr{A}(\alpha),\ \alpha_n=\alpha}$.

证明是基

假设 $\alpha_1\ldots\alpha_n$ 线性相关，则存在不全为零的 $k_1\ldots k_n\in F$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$.

设 k_t 为 $k_1\ldots k_n$ 最后一个非零数，

则用 $\mathscr{A}$ 作用上式 $t-1$ 次，则 $k_t\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)=0$,

得到 $\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)=0$，与题矛盾.

$\therefore\alpha_1\ldots\alpha_n$ 线性无关，可作为一组基.

$\mathscr{A}(\alpha_1\ldots\alpha_n)=(\alpha_1\sim\alpha_n)\begin{pmatrix}0_{n-1}&I_{n-1}\\0&0_{n-1}\end{pmatrix}$

4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}(x,y,z)=(x+2y,\ x-3z,\ 2y-z)$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,0,0)$. $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,1)$ 下的矩阵.

(2) 是否存在基 $\beta_1.\beta_2.\beta_3$，使得 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(1) $\underline{\mathscr{A}(x,y,z)}=(x+2y,\ x-3z,\ 2y-z)$

x.y.z是3个数，故该映射实质为 $\mathscr{A}\alpha=\beta$.

$\therefore\mathscr{A}\alpha_1=\mathscr{A}(1,0,0)=(1,1,0)$

$\mathscr{A}\alpha_2=\mathscr{A}(1,1,0)=(3,1,2)$

$\mathscr{A}\alpha_3=\mathscr{A}(1,1,1)=(3,-2,1)$.

即 $\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$

$\begin{pmatrix}1&3&3\\1&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}A$,

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&3&3\\1&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\1&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&5\\1&-1&-3\\0&2&1\end{pmatrix}$

(2) 不同基下同一个变换的表示矩阵

$\Rightarrow$ A与B相似，$\exists$可逆T使 $B=T^{-1}AT$

$\Rightarrow$ 判断A.B是否相似即可.

采用相似不变量：

如 $A=0$，如 $B=3$. 不相等，不相似，不存在.

5. 设 $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$,

$\beta_1=(-1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,1)^T$, $\beta_3=(2,-1,-2)^T$.

$\alpha.\beta$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的两组基. 设变换 σ 有

$\sigma\beta_1=(1,0,-3)^T$, $\sigma\beta_2=(0,-1,-1)^T$, $\sigma\beta_3=(-5,-1,0)^T$,

求 σ 在两组基下的矩阵.

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}$

设 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T=IT$,

即过渡矩阵 $T=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

$\therefore\sigma(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)B$,

$B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&3\\-2&1&-5\\-2&0&-4\end{pmatrix}$

$\sigma(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)T^{-1}A$

$=\sigma(\beta_1\beta_2\beta_3)T^{-1}$

$=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)BT^{-1}$.

$\therefore T^{-1}A=BT^{-1}$, $A=TBT^{-1}=\sigma(\beta_1\beta_2\beta_3)T^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3&-3\\-2&1&-2\\-4&6&-7\end{pmatrix}$

五、特征值、特征向量.

例：已知 λ 为 A 的特征值，证明：

① λ 为 A^T 特征值.

$|\lambda I-A|=0\iff|\lambda I-A^T|=0$.

② λ^k 为 A^k 特征值.

$A^kx=A(A^{k-1}x)=\lambda(A^{k-1}x)=\cdots=\lambda^kx$.

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

λ 为 A 特征值，则 $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 特征值.

$f(A)x=a_0Ix+a_1AX+\cdots+a_nA^nX$

$=a_0X+a_1\lambda X+\cdots+a_n\lambda^nX=f(\lambda)X$.

③ $\frac{1}{\lambda}\det(A)$ 为 A^* 的特征值. ($AA^*=\det(A)I$. $Ax=\lambda x=\lambda Ix$, $Ax=\lambda AA^*\frac{1}{\det(A)}x$, $\frac{1}{\lambda}\det(A)x=A^*x$)

$AA^*=\det(A)I_n$.

$\because\det(\lambda I-A)=0$, $\therefore\det(A^*)\det(\lambda I-A)=0$,

即 $\det(\lambda A^*-A^*A)=\det(\lambda(A^*-\frac{1}{\lambda}A^*A))$

$=\lambda^n\det(A^*-\underline{\frac{1}{\lambda}\det(A)I})=0$.

④ 若A与B相似，则A.B有相同的特征多项式.

相似 $\Rightarrow B=T^{-1}AT$. $p_B(\lambda)=|\lambda I_n-T^{-1}AT|$

$|\lambda I-T^{-1}AT|=|T||\lambda I_n-T^{-1}AT||T^{-1}|$

$=|T(\lambda I_n-T^{-1}AT)T^{-1}|=|\lambda I_n-A|$.

例1. 设n阶方阵A的n个特征值分别为 $\lambda_1\ldots\lambda_n$，求 $I+A$ 的特征值及 $\det(I+A)$.

$\det(\lambda I-A)=p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$=\det(\lambda I-(I+A)+I)=\det((\lambda+1)I-(I+A))$,

特征值为 $\lambda_1+1,\ldots,\lambda_n+1$.

$\det(I+A)=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)$

$\det(\lambda I-A)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)=p_A(\lambda)$

$\det(\lambda I-(I+A))=\det((\lambda-1)I-A)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-1-\lambda_i)$

例. $\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$. 证明：$A^2=I$

$\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)$

$=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A+I&0\\0&A-I\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}I_n&0\\0&0\end{pmatrix}=n$.

(i) $\mathrm{rank}(A+I)=n$,

则 $\mathrm{rank}(A-I)=0$, $A=I$.

(ii) $\mathrm{rank}(A-I)=n$. 同理.

(iii) $0<\mathrm{rank}(A+I)<n$.

设 $\mathrm{rank}(A+I)=r$，则 $\mathrm{rank}(A-I)=n-r$.

则对 $(A+I)x=\theta$. $(A-I)x=\theta$ 对应的解空间，维数为 $n-r$ 维和 r 维.

取特征值 -1 的基 $x_1\ldots x_r$，特征值 1 的基 $x_{r+1}\ldots x_n$. 线性无关.

则 $T=(x_1\ldots x_r\ x_{r+1}\ldots x_n)$ 为可逆矩阵.

$AT=A(x_1\ldots x_r\ x_{r+1}\ldots x_n)$

$=(-x_1,\ldots,-x_r\ x_{r+1}\ldots x_n)$

$=T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&-I_{n-r}\end{pmatrix}$,

$\therefore A=T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&-I_{n-r}\end{pmatrix}T^{-1}$, $A^2=I$.

例. $V=F^{2\times2}$. $f:M\to AM$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$. 求 f 的全部特征值. 特征向量.

求特征值 ← 求特征多项式 ← 找矩阵 ← 找基. 表示 f 在基上的矩阵.

取基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=(\quad)$. ……

$f(\alpha_1)=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$f(\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=$　$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$f(\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=$　$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$

$f(\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=$　$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$

f 在 $\alpha_1\ldots\alpha_4$ 下的矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

根据特征多项式求B的特征值

$\det B=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$, $\lambda_1=1$. $\lambda_2=2$, f特征值.

根据特征值求特征向量.

对 $\lambda_1=1$, $(\lambda_1I-B)X=\theta$ 得解.

基下坐标. $x_1=(1,0,0,0)^T$. $x_2=(0,1,0,0)^T$.

B的特征向量 $c_1x_1+c_2x_2$.

基 ↓ 向量.　f的特征向量 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=\begin{pmatrix}c_1&c_2\\0&0\end{pmatrix}$.

$\lambda_2=2$, $(\lambda_2I-B)X=\theta$ 得解.

B的特征向量 $c_3(1,0,1,0)^T+c_4(0,1,0,1)^T$

f的特征向量 $c_3(\alpha_1+\alpha_3)+c_4(\alpha_2+\alpha_4)$

$=\begin{pmatrix}c_3&c_4\\c_3&c_4\end{pmatrix}$

1. 设A是可逆方阵. 证明：

(1) A的特征值一定不为0.

(2) 若 λ 是A的一个特征值，则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，且对应特征向量相同.

(1) 假设A有为0的特征值，

即 $p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ 有为0的根.

$\lambda=0$，有 $\det(-A)=0$. 则A不可逆.

$\therefore$ A不存在为0的特征值.

假设A有为0的特征值，

即 $Ax=0x$ 存在对应的特征向量.

$\therefore$ A可逆，$\therefore x=\theta$，与特征向量定义矛盾.

(2) $\det(\lambda I-A)=0$

$\det(\lambda I-A)=\det(\lambda A(A^{-1}-\lambda^{-1}I))$

$=\lambda^n\det A\det(A^{-1}-\lambda^{-1}I)$.

$\lambda\neq0$, $\det A\neq0$, $\therefore\det(\lambda^{-1}I-A^{-1})=0$.

即 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.

$Ax=\lambda x$, $\lambda^{-1}A^{-1}Ax=\lambda^{-1}A^{-1}\lambda x$, $\lambda^{-1}x=A^{-1}x$.

$\therefore$ 对应特征向量相同.

2. 证明：(1) 若 $A^2=I$，则A的特征值只能是 ±1.

(3) 如果实方阵 $AA^T=I$，则 $|\lambda|=1$.

(2) n阶实方阵满足 $A^T=-A$，则A的特征值为0或纯虚数.

(1) $\det A^2=\det I$, $\det A\cdot\det A=\det I=1$.

$IX=A^2X=A\lambda X=\lambda AX=\lambda^2X$.

$\therefore(\lambda^2-1)X=\theta$, $\lambda=\pm1$.

(2) $\det(\lambda I-A)$

$=\det(\lambda A^TA-A)=\det(A(\lambda A^T-I))$

$=\det(\lambda^TA(A^T-\lambda I))$

$Ax=\lambda x$, $x^TA^T=\lambda x^T$.

$\bar{x}^TA^T=\bar{\lambda}\bar{x}^T$, $\therefore\bar{x}^TA^TAx=\bar{\lambda}\bar{x}^T\cdot\lambda x=|\lambda|^2\bar{x}^Tx$

$\therefore\bar{x}^TIx=|\lambda|^2\bar{x}^Tx$, $\therefore|\lambda|=1$. $(x\neq0)$.

(3) $Ax=\lambda x$, $-Ax=-\lambda x$. $\therefore A^Tx=-\lambda x$.

$x^TA=-\lambda x^T$, $\bar{x}^TA=-\bar{\lambda}\bar{x}^T$.

$\bar{x}^TAx=-\bar{x}^TA^Tx=\lambda\bar{x}^Tx$.

$\bar{x}^TA^T=\bar{\lambda}\bar{x}^T$, $\bar{x}^TAx=\bar{\lambda}\bar{x}^Tx$

$\therefore\lambda\bar{x}^Tx=\bar{\lambda}\bar{x}^Tx$. $x\neq0$, $\therefore\lambda=\bar{\lambda}$.

$\therefore\lambda$ 为0或纯虚数.

✓ $\alpha^T\beta=2=\beta^T\alpha$，求 $\beta\alpha^T$ 特征值.

$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$　$\beta=(b_1\ b_2\ b_3)$

$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\beta^T\alpha=\begin{vmatrix}a_1b_1&a_2b_1&a_3b_1\\a_1b_2&a_2b_2&a_3b_2\\a_1b_3&a_2b_3&a_3b_3\end{vmatrix}=A$.

$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_1b_1&-&-\\-&\lambda-a_2b_2&-\\-&-&\lambda-a_3b_3\end{vmatrix}=0$

$=\underline{(\lambda-a_1b_1)(\lambda-a_2b_2)(\lambda-a_3b_3)}$

$-a_2b_1a_1b_2\ldots$

$-a_3b_1a_1b_3(\lambda-a_2b_2)-\ldots$

$-\ldots$

$=\underline{\lambda^3-(a_1b_1+\cdots)\lambda^2}$　$\lambda=0$ 或 2

$A^*=A^T$.　$a_{11}=a_{12}=a_{13}$.

$AA^*=|A|I$.　$\begin{pmatrix}a&c&a\\a&b_2&b_3\\a&b_3&c_3\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}a&c&c\\a&b&c\\a&c&b\end{pmatrix}$

$AA^T=|A|I$.

↳ 对称.

$a\times[b_2c_3-b_3^2]=\det A$

$b_2\times($

$3a^2=\det A$.　$3a=(b_2\times c_3-b_3^2)$

$a^2+b_2^2+b_3^2=3a^2$,　$b_2^2+b_3^2=2a^2$

$c_2^2+b_3^2+a^2=3a^2$.　$c_3^2+b_3^2=2a^2$

$3a^2=a(b^2-c^2)=a^2+b^2+c^2$.　$b_3^2=c_2^2$

$3a=b^2-c^2$.　$2a^2=b^2+c^2$

$a^2=\frac{b^4+c^4-2b^2c^2}{3}=\frac{b^2+c^2}{2}$

$2b^4+2c^4-4b^2c^2=3b^2+3c^2$.

$2t^2+2s^2-4ts-3t-3s=0$

$2(t-s)^2-3(t+s)=0$ （m，n）

5. 设n阶方阵 $A\neq0$ 满足 $A^m=0$，其中 $m\ge2$ 为正整数.

(1) 求A的特征值.

(2) 证明：A不能相似于对角阵.

(3) 证明：$\det(I+A)=1$

(1) $\det A^m=\det A\cdot A^{m-1}$

$Ax=\lambda x$. $A^mx=\lambda^mx$. $\lambda^m=0$. $\lambda=0$.

(2) 假设A相似于对角阵.

则 $\exists$ 可逆T, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

则 $0=T^{-1}A^mT=\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^m\end{pmatrix}$

$\therefore\lambda_1^m=\cdots=\lambda_n^m=0$, $\therefore A=0$，矛盾.

(3) A的特征值只能是0,

故存在可逆T使 $T^{-1}AT$ 为严格上三角.

$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0&&*\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}$

$\therefore T^{-1}(I+A)T\begin{pmatrix}1&&*\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}$

$\therefore\det(I+A)=\det(T^{-1}(I+A)T)=1$.

6. A为三阶实对称阵，特征值 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. $\alpha=(0,1,1)^T$ 是 λ_1 的特征向量. 求A.

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$.　A对称.

$A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$　$AP=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\-1&&\\-1&&\end{pmatrix}$

实对称阵正交相似于对角方阵.

将 $\alpha_1(0,1,1)$ 扩充为标准正交基.

$\alpha_1=(0,1,1)$. $\alpha_2=(1,0,0)$. $\alpha_3=(0,1,-1)$.

$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$A=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^T$

$=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&0&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

六、相似对角化.

引例. $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ 能否相似于对角阵？

$p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)^2$.

若相似于对角阵，则相似于 $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

$(p_J(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2&0\\0&\lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)^2$.

假设A与2I相似，则 $\exists$ 2阶可逆T,

使 $T^{-1}(2I)T=A$.

又 $T^{-1}(2I)T=2I\neq A$，则假设不成立.

故A不可能相似于对角阵.

[特征多项式不是判断相似的条件.]

例. $A=\begin{pmatrix}0&0&x\\1&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似于对角阵，求 x.y 满足的条件.

(i) 存在n个互异的特征值

则必有n个特征向量无关.

要 $\det=(\lambda-1)(\lambda^2-x)$.

则 $1.\ x\neq0.$ y任意.

(ii) 不存在，从特征值中找n个无关

$x=1$. $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

可对角化 ⇔ 每个n阶重数

$\lambda=1$时，n阶重数为2,

需要 $\mathrm{rank}(I-A)=1$.

$I-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to1.\ y.$

$(\mathrm{rank}(\lambda_1I_3-A)+\mathrm{rank}(\lambda_3I-A)=n)$.

$x=0.$ ……

例2. 已知矩阵A.B相似，

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}y&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 x.y.

$\underline{\det A=-1.\ \det B=-y.\ y=1.}$ 考虑较成

$p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-x\end{pmatrix}$

$=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda x)-(\lambda-1)$

$=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda x-1)$

$p_B(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$

$=(\lambda-y)(\lambda+1)(\lambda-1)$

$=\sim\!\sim\!\sim$　$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-y)$

$p_A=p_B$. $\therefore x=0$. 比较系数. $x=0$, $y=1$.

* 相似矩阵，$p_A(\lambda)$ 相同.

1. A.B为实对称矩阵，$AB=BA$.

求证：存在正交方阵P，使 P^TAP 和 P^TBP 都是对角阵.

同一个P使A.B变为对角阵.

⇒ 证明A.B有相同的特征向量.

B的特征值 $\lambda_1\ldots\lambda_s\in\mathbb{R}$.

特征子空间 $V_1\ldots V_s$.

B实对称，$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$.

$BA\alpha=AB\alpha=\lambda A\alpha$.　$A\alpha\in V_i$.

V中有线性变换 $x\to Ax$

$V_1\ldots V_s$ 取标准正交基，

线性变换表示为 $P=\begin{pmatrix}P_1&&\\&\ddots&\\&&P_s\end{pmatrix}$

存在线性无关的向量使 $AP_j=\lambda_jP_j$.

2. A是实对称矩阵，B是正定矩阵，

证明：存在可逆矩阵C，使 C^TAC 和 C^TBC 都为对角形矩阵.

B正定，$\exists$ 可逆 C_1，使 $C_1^TBC_1=I$.

A实对称，则 $C_1^TAC_1$ 实对称.

$\therefore\exists$ 正交 C_2, $C_2^T(C_1^TAC_1)C_2=\Lambda$.（特征对角阵）

取 $C=C_1C_2$，则有

$C^TBC=C_2^TC_1^TBC_1C_2=C_2^TIC_2=I$

$C^TAC=C_2^TC_1^TAC_1C_2=\Lambda$.

* 证明正定：首先为对称阵. 再 x^TAx.

七、欧氏空间.

1. 设 $V=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\}$ 为次数不超过2的实系数多项式构成的线性空间.

(1) 证明：$(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$ 定义了V上的一个内积.

(2) 应用 Schmidt 正交化将向量组 $(1,x)$ 改造成对于(1)中所定义内积的标准正交向量组.

(1) [证明为内积 ⇒ 三个性质].

对称性：$(f,g)=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$
$(g,f)=g(0)f(0)+g(1)f(1)+g(2)f(2)$.

线性性：$(\lambda f,g)=\lambda f(0)g(0)+\lambda f(1)g(1)+\lambda f(2)g(2)$
$=\lambda(f(0)g(0)+\cdots+f(2)g(2))$
$=\lambda(f,g)$

正定性：$(f,f)=f^2(0)+f^2(1)+f^2(2)\ge0$
当且仅当 $f=0$ 时，$(f,f)=0$.

(2) 向量组 $(1,x)$ ⇒ $\alpha_1=1$, $\alpha_2=x$.

单位化：$(\alpha_1,\alpha_1)=1+1+1=3=|\alpha|^2$,
$\therefore|\alpha|=\sqrt3$, $e_1=\frac{\alpha_1}{\sqrt3}=\frac{1}{\sqrt3}$.

正交化：$\beta_2=\alpha_2-(e_1,\alpha_2)e_1$
$=x-(\frac{1}{\sqrt3},x)\frac{1}{\sqrt3}$
$=x-(0+\frac{1}{\sqrt3}+\frac{2}{\sqrt3})\times\frac{1}{\sqrt3}=x-1$.

单位化：$(\beta_2,\beta_2)=(-1)^2+0+1^2=2$,
$e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\beta_2}{\sqrt2}=\frac{x-1}{\sqrt2}$.