逆矩阵的多种求法

2021年10月26日 星期二 下午9:48

线代逆矩阵的几种求法

1. 定义法（若 $A\cdot A^{-1}=I$）
则称 A^{-1} 为 A 的逆矩阵

eg. 若 $A^3=0$，求 $(A-I)^{-1}$

解：$A^3=0 \Rightarrow A^3-I^3=-I$
$\Rightarrow (A-I)(-A^2-AI-I^2)=I$
$\Rightarrow$ $A-I$ 可逆
$(A-I)^{-1}=-(A^2+AI+I^2)$

2. 待定系数法
已知 A 为 n 阶方阵
设 B 为 n 阶方阵
$A\cdot B=I$
联立方程组求得
B 中各元素
复杂 → 一般不使用

3. 伴随矩阵法
即 $A\cdot A^*=|A|\cdot I$
$\Rightarrow (A^{-1}A)A^*=|A|\cdot A^{-1}I$
$\Rightarrow IA^*=|A|\cdot A^{-1}$
$\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$
课本上介绍．最常用的方法
Specifically
若 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times2}$ 二阶方阵
且 $ad-bc\neq0$
$\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{|A|}$
称为（"两调一除"）
$a\,d$ 调换位置．$b\,c$ 添负号
再除以 $|A|$

4. 分块矩阵法

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

对 $A.B.C.D$ 的行．列有所要求
且公式复杂．但存在一些特殊情况

eg. $\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} & A_1 \\ A_2 & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

5. 初等变换法
今天上课学过．对任一可逆矩阵 $A_{n\times n}$
可以通过初等变换将其转化为 I_n
即
$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=I_n$
（P_i、Q_i 均为初等方阵）
对等式两边 依次左乘 $P_s^{-1}.P_{s-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}$
右乘 $Q_t^{-1}\,Q_{t-1}^{-1}\cdots Q_1^{-1}$
即
$P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots(P_s^{-1}P_s)\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots(Q_tQ_t^{-1})\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$
$=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}I_nQ_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$
$\Leftrightarrow A=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}I_nQ_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$
再依次右乘 $Q_1.Q_2\cdots Q_t.P_s\cdots P_2.P_1$
得到 $A(Q_1Q_2\cdots Q_tP_s\cdots P_2\cdot P_1)=I_n$
$\Rightarrow A^{-1}=(Q_1Q_2\cdots Q_t)(P_s\cdots P_2P_1)$
令 $Q=Q_1Q_2\cdots Q_t$
$P=P_s\cdots P_1$
注意到 $P\cdot A\cdot Q=I_n$，$A^{-1}=QP$
即 P 为对 $A\to I_n$ 进行的行变化
Q 为对 $A\to I_n$ 进行的列变化
故可通过下列方法进行逆矩阵求解

令矩阵
$$\begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$
↓ 通过初等变化（只对前n行前n列进行操作）
$$\begin{pmatrix} I_n & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$
则 Q 为列变化，P 为行变化（记录）
$\Rightarrow A^{-1}=QP$

eg. 求 $A=\begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}

作矩阵 $\begin{pmatrix} A & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 & 1 & & \\ 3 & 7 & -3 & & 1 & \\ -4 & -10 & 3 & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+\frac{3}{2}r_1} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 & 1 & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & -2 & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1\times(-\frac{1}{2}) \\ r_2\times(-2) \\ r_3\times(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & & \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & -1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2+(-\frac{5}{2})C_1 \\ C_3+C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & & \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_3 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $Q=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=QP=\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

6. 向量法
令 $A_n=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 将 A_n 通过行变行化变为 I_n，则等号右边可拆为一个 n 阶方阵与 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 的积、

例子．$A=\begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

令 $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_1]{r_2+(-3)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ -3\alpha_1-2\alpha_2 \\ 4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ -3\alpha_1-2\alpha_2 \\ -2\alpha_1+\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{\substack{r_1+(-2)r_2 \\ r_1+(-1)r_3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3 \\ -3\alpha_1-2\alpha_2 \\ 2\alpha_1-\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

即 $I_3=\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}A$

又 $AA^{-1}=I_3$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$