矩阵

2021年9月23日 星期四　　上午9:46

一、定义&概念

1. $A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$

   称数 a_{ij} 为元素，a_{ii} 也称为对角元。

2. 如果 $m=n$，则称为方阵。

   $(a,b,c)\to$ 行向量　$\begin{pmatrix} a\\b\\c \end{pmatrix}\to$ 列向量

   零矩阵：全为零。
   非零矩阵：有不为零的元素。

   矩阵相等：行列数等，每个元素相等。

   上三角阵：非零元素集中在（◥）$a_{ij}=0, i>j$
   相对应有下三角阵，$a_{ij}=0, i<j$
   对角矩阵：非零元素集中在方阵对角线。
   对称矩阵：方阵+对称（$a_{ij}=a_{ji}$）。　单位矩阵 I
   反对称矩阵：方阵+对称+反（$a_{ij}=-a_{ji}$）

3. 特殊矩阵 $e_1=(1\ 0\ 0\ 0\cdots 0)$
   $e_2=(0\ 1\ 0\ 0\cdots 0)$
   $e_3=(0\ 0\ 1\ 0\cdots 0)$　可用来表示别的阵，通过加法、数乘计算。

   基本矩阵 $E_{ij}=(a_{kl})_{m\times n}$ 满足 $\begin{cases} a_{kl}=0, & k\neq i 或 j\neq k \\ a_{ij}=1 \end{cases}$
   （例如 $E_{11}=\begin{pmatrix} 1&0\\0&0 \end{pmatrix}$）

二、矩阵运算

1. 转置（transform）：行列互换。　$(AB)^T=B^TA^T$
   $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$
   证明：$(AA^{-1})^T=(A^{-1})^TA^T=I^T=I$，$(A^{-1})^TA^T=A^T(A^{-1})^T$

   $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}=(b_{ij})_{n\times m}$
   其中 $b_{ij}=a_{ji}$

2. 加法：$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}$
   数乘：$\lambda\in F$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$（每个数都乘）
   $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}E_{ij}$（基本矩阵表示）

3. 乘法
   ① 定义：由线性方程组出发。

   $\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34} \end{pmatrix}_{3\times 4}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}_{4\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

   $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$ 才可相乘。
   A的每一行 m 个与 b 的每一列 p 个相乘，
   Loop b 的 1~p 列
   　Loop 取第 p 列的 1~n 行各个　} 相乘求和
   　　Loop 取第 m 行的 1~n 列各个
   $AB=C=(c_{ij})_{m\times p}$，$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$
   第 i 行：a 的第 i 行 × B 矩阵。　} 分块
   第 j 行：a 矩阵 × b 的第 j 列。

   ② 性质。
   > 若 $m\neq p$，则 AB 可乘时，BA 不可乘。
   > 即使 A、B 同阶，AB 与 BA 也不一定相等。
   即不满足交换律。
   > 非零矩阵乘积可为零矩阵。

   例：$e_{i(1\times m)}A_{m\times n}=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in})$（取第 i 行）
   $(0\ 0\ 1\ 0)\times\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}$

   $A_{m\times n}e^T_{i(n\times 1)}=(a_{1i},a_{2i},\cdots a_{mi})$（取第 i 列）

   $E_{ij(m\times m)}A_{m\times n}$（取第 i 行，放第 j 行）

   $A_{m\times n}E_{ij(n\times n)}$（取第 j 列，放第 i 列）

   $A_{m\times n}(\cdots)$ = 取第 i 列，放第 j 列。

四、其他性质

① $AB\neq BA$，$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
$A+B+C=A+(B+C)$，$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
$A(B+C)=AB+AC$，$(AB)C=A(BC)$ ✓

证明：$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$
所有行 各行内 所有列 各列内

*关于（$j\geq i$）$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}$，$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_{ij}$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{p\times q}$
$((AB)C)_{ij}=\sum_{l=1}^{p}(AB)_{il}c_{lj}$　$(AB)_{m\times p}\times C_{p\times q}$，第 i 行第 j 列，其中 l 进行运动。
$=\sum_{l=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl})c_{lj}$　$A_{m\times n}\times B_{n\times p}$ 第 i 行 l 列，k 运动。
$=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}$
同理可 $(A(BC))_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj})$
$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj}$

② $AB=A(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}b_{ij}E_{ij})=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}AE_{ij})$　用 E_{ij} 表示 B；数、阵

③ 上三角阵的乘积仍为上三角阵。
$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$
满足：当 $i>j$ 时，$a_{ij}=b_{ij}=0$ ⇒ $\begin{cases} k<i, & a_{ik}=0 \\ k>j, & b_{kj}=0 \end{cases}$
$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，$i\leq j$ 时，计算。
$i>j$ 时，$\begin{cases} k<i, & a_{ik}=0 \\ k\geq i, & 则有 k\geq i>j, b_{kj}=0 \end{cases}$ ⇒ $a_{ik}b_{kj}=0$

④ A 是方阵 ⇒ 可以作 $A^n=AA\cdots A$。
定义 $A^0=I=\begin{pmatrix} 1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1 \end{pmatrix}$ 单位阵。
矩阵多项式 $f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$（不光数）

例. Fibonacci 数列。$F_1=F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$
$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\to F_n=(1\ 1)\begin{pmatrix} F_{n-1}\\F_{n-2} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} F_n\\F_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1\\1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1}\\F_{n-2} \end{pmatrix}$
$\therefore\begin{pmatrix} F_n\\F_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1\\1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1}\\F_{n-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1\\1&0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} F_{n-2}\\F_{n-3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1\\1&0 \end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix} F_2\\F_1 \end{pmatrix}$
对 $\begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix}^k=(I_3+\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix})^k$，其中 $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$（$n\geq 3$）
关于利用二项式计算，$(A+B)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^iB^{k-i}$，条件 $AB=BA$
比如有 $AI=IA$（性质），故可以用 $(I+A)^k$。
* 思考 $\begin{pmatrix} 0&1&1\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}^n$：1 往上移。
$\begin{pmatrix} 1&1\\1&0 \end{pmatrix}^k$ 计算。

三、矩阵初等变换　$A=(a_{ij})_{m\times n}$

六、分块矩阵

1. 子块：将矩阵分块后得到。
   子矩阵：取出元素按行列排列。
2. 分块矩阵满足加减、数乘、乘法。
   关于乘法：
   ① A 行 B 列分法一样。

   $A=\left(\begin{array}{c|cc} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{array}\right)_{4\times 3}$（$A_1$ | A_2）　$B=\left(\begin{array}{cc} b_{11}&b_{12}\\\hline b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32} \end{array}\right)_{3\times 2}$（$B_1$ / B_2）

   $A_1\times B_1=C_{1\,4\times 2}$，$A_2\times B_2=C_{2\,4\times 2}$
   $A\times B=\begin{pmatrix} c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\\c_{41}&c_{42} \end{pmatrix}_{4\times 2}=C=C_1+C_2$　分别算出，对应作和。

   ② A 列、B 行可随意分。
   $A=\begin{pmatrix} A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\\A_{31}&A_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$　$B=\begin{pmatrix} B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$
   $A\times B=\begin{pmatrix} c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\\c_{41}&c_{42} \end{pmatrix}_{3\times 2}=C$
   分块列由 A 列决定，行由 B 行决定。

   例. $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1&1&1&0\\0&1&0&1\\\hline 0&0&1&1\\0&0&0&1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B&I\\0&B \end{pmatrix}$ 准上三角阵。
   $A^2=\begin{pmatrix} B&I\\0&B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B&I\\0&B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^2&2B\\0&B^2 \end{pmatrix}$ 准上三角。
   $A^3=\begin{pmatrix} B^2&2B\\0&B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B&I\\0&B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^3&3B^2\\0&B^3 \end{pmatrix}$
   $A^n=\begin{pmatrix} B^n&nB^{n-1}\\0&B^n \end{pmatrix}$ 归纳证明。

3. 分块矩阵初等变换
   ① 行：交换两行块。

七、秩和相抵

（一）初等变换角度。
1. A 与 B 相抵：存在可逆矩阵使 $PAQ=B$
   $A\xleftrightarrow[变换]{初等}B$
   相抵标准形：$A\longrightarrow\begin{pmatrix} I_r&0\\0&0 \end{pmatrix}$
   * 若 A 与 B 相抵，则对应相抵标准形同。
   $A\longleftrightarrow\begin{pmatrix} I_r&0\\0&0 \end{pmatrix}$，$B\longleftrightarrow\begin{pmatrix} I_s&0\\0&0 \end{pmatrix}$　仍然初等变换，$r=s$。
   ⇒ 矩阵可按相抵分类。
   如 3 阶方阵，有 0、$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$、$I_3$
   秩：相抵标准形的 r。
   秩相等 ⇔ 相抵 ⇔ 同相抵标准形
   例. 计算 $A=\begin{pmatrix} x&1&\cdots&1\\1&x&&\vdots\\&&\ddots&1\\1&1&\cdots&x \end{pmatrix}$ 的秩。
   $A=\begin{pmatrix} x&1&\cdots&1\\1&x&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&x \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x+n-1&1&\cdots&1\\x+n-1&x&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\x+n-1&1&\cdots&x \end{pmatrix}$
   $\to\begin{pmatrix} x+n-1&1&\cdots&1\\0&x-1&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-1 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} x+n-1&1\\\hline 0&(x-1)I \end{array}\right)$
   $x=1$，$A=\left(\begin{array}{c|c} n&1\cdots1\\\hline 0&0 \end{array}\right)$，$rank(A)=1$。
   $x\neq 1$，$A=\left(\begin{array}{c|c} x+n-1&0\\\hline 0&I \end{array}\right)$　利用初等变换进行化简。
   $x=1-n$，$A=\begin{pmatrix} 0&0\\0&I \end{pmatrix}$，$rank=n-1$
   $x\neq 1-n$，$A=\begin{pmatrix} x+n-1&0\\0&I \end{pmatrix}$，$rank=n$。

2. 性质。
   ① $rank(A^T)=rank(A)$
   证明：$PAQ=\begin{pmatrix} I_r&0\\0&0 \end{pmatrix}$，$Q^TA^TP^T=\begin{pmatrix} I_r&0\\0&0 \end{pmatrix}^T$
   $\therefore rank(A)=rank(A^T)=r$。