# 行列式

2021年10月9日 星期六 上午10:22

## 一、定义与计算

### 1. 方阵求行列式

2阶 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad + (-1)bc$

去掉所在行列 $(-1)^{1+1}$ $(-1)^{1+2}$

3阶 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

### 2. $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$

记 $M_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的余子式，为去掉i行j列的 n-1 阶方阵.

$(-1)^{i+j}M_{ij} \triangleq A_{ij}$，代数余子式.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$$

例. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 0\times\cdots + (-1)^{1+2}5\times\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-4)\begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 二、性质

### 1. 可按任意行展开：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$.

数归：2阶 按第一行展开与按第二行同.

假设 n-1 阶 按任意行展开.

验证 n 阶 可按任意行展开.

$M_{ij}$：删除第i行、第j列.

$D_{ij}$：删除第1、k行、第i、j列. $D_{ij}=D_{ji}$

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1\,1} & \cdots & & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_{ij}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & \cdots & a_{k-1\,i-1} & a_{k-1\,i+1} & \cdots & a_{k-1\,n} \\ a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1\,i-1} & a_{k+1\,i+1} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k-2 \\ k-1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}M_{1i}$ （按第1行展开）

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}M_{ki}$ （按第k行展开）

n-1

$M_{1i}$（去掉第1行第i列）$=\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{k-1+j}a_{kj}D_{ij} + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{k-1+j-1}a_{kj}D_{ij}$

$$\begin{matrix} 1 \\ \\ k-1 \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & & a_{3\,i-1} & a_{3\,i+1} & & a_{3n} \\ \vdots & a_{k} & & & & \\ a_{n1} & & a_{n\,i-1} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（按第k-1行/$a_k$展开）

n-1

$M_{ki}$（去掉第k行第i列）$=\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j}a_{1j}D_{ij} + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{j-1}a_{1j}D_{ij}$

（按第1行展开）

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{k-1+j}a_{kj}D_{ij}+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{k-1+j-1}a_{kj}D_{ij}\right)$$

例. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n-1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n}(n-1)\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 2 & \\ n-2 & & \end{vmatrix} = (-1)^{n}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 2 & \\ n-3 & & \end{vmatrix}$$

例. $$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & x & y \\ y & \cdots & & & \cdots & x \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x & y & & \\ & x & y & \\ & & \ddots & y \\ & & & x \end{vmatrix}$$

### 2. 行交换：$A \xrightarrow{r_p\leftrightarrow r_q} B$，$|A|=-|B|$

$|A|$ 按第p行展开 $=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{p+i}a_{pi}M_{pi}$

记 $D_{ij}$ 为 $|A|$ 去掉第 p、q 行、去掉第 i、j 列.

$$M_{pi}=\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{q-1+j}a_{qj}D_{ij}+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{q-1+j-1}a_{qj}D_{ij}$$

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{q+p+i+j-1}a_{pi}a_{qj}D_{ij}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}}_{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}}(-1)^{q+p+i+j}a_{pi}a_{qj}D_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{q+p+i+j-1}D_{ij}(a_{pi}a_{qj}-a_{pj}a_{qi}).$$

同理，$|B|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{p+q+i+j-1}D_{ij}(a_{qi}a_{pj}-a_{qj}a_{pi})$

$\therefore |A|=-|B|$.

### 3. 可按列进行展开：$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$.

按行：$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=a_{11}M_{11}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$

按列：$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$

$$M_{1j}\ \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \bcancel{a_{i1}} & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

与列发生联系，按第1列展开.

对其中的 $a_{i1}$ 计算时，对 $M_{1j}$ 去掉 i-1 行 1 列.

对 $|A|$ 而言去掉 1、i 行、1、j 列，记为 $N_{ij}$.

$\therefore M_{1j}=\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1+1}a_{i1}N_{ij}$. （第1列各行/i行）

$$M_{i1}\ \begin{vmatrix} \bcancel{a_{12}} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i-1\,2} & \cdots & & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,2} & \cdots & & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n2} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

与行发生联系，按第1行展开.

对其中的 $a_{1j}$ 计算时，对 $M_{i1}$ 去掉 1 行 j-1 列.

对 $|A|$ 而言去掉 1、i 行、1、j 列，同为 $N_{ij}$.

$\therefore M_{i1}=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1+1}a_{1j}N_{ij}$ （第1行各列/j列）

按行：$\det(A)=a_{11}M_{11}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=a_{11}M_{11}+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{1j}a_{i1}N_{ij}$

按列：$\det(A)=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}M_{i1}=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j}N_{ij}$

可推广至任意列展开.

### 4. $|A|=|A^T|$.

$b_{ij}=a_{ji}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ \bcancel{a_{i1}} & \cdots & a_{ij} & \cdots & \bcancel{a_{in}} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |A^T|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{nj} \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

去掉 $a_{ij}$ 的余子式 $M_{ij}$ 去掉 $a_{ij}=b_{ji}$ 的余子式 $M_{ij}$

$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$. $\det(A^T)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ji}M_{ij}$.

按第i行展开，对 $a_{ij}$. 按第i列展开，对 $b_{ji}$.

### 5. $A \xrightarrow[\lambda c_i]{\lambda r_i} B$，$|B|=\lambda|A|$.

$B=\lambda A$，$|B|=\lambda^{n}|A|$.

### 6. 存在相同或成比例两行/列，$\det(A)=0$.

### 7.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta+\gamma \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \gamma \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{vmatrix}$$

列上同样结果，即转置也满足.

### 8.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \lambda\alpha_i+\alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \xleftarrow{\lambda r_i\rightarrow r_j} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\det\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \lambda\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix}.$$

按初等变换结果 & 行列式性质：

$|S_{ij}|=-1$. $|D_i(\lambda)|=\lambda$. $|T_{ij}|=1$

## 三、行列式的完全展开式

### 1. 引入：线性函数，$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

满足性质 ① $f(\lambda x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

② $f(a_1+a_2,x_2\cdots x_n)=f(a_1,x_2\cdots x_n)+f(a_2,\cdots,x_n)$.

例如 $y=x_1x_2\cdots x_n$.

### 2. 完全展开式的计算方法.

$$\det(A)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \triangleq \det(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$$

表示为多元函数.

$\alpha_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$ （每一项数×基本单位）

$\therefore \det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=\det\left(\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}e_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}e_{j_2},\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}e_{j_n}\right)$

"加法分配"

$=\underbrace{\sum_{j_1=1}^{n}}_{行列式性质②}\det\left(a_{1j_1}e_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}e_{j_2},\cdots,\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}e_{j_n}\right)$

提取系数

$=\sum_{j_1=1}^{n}\underbrace{a_{1j_1}}_{行列式性质①}\det\left(e_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}e_{j_2},\cdots,\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}e_{j_n}\right)$

$=\cdots=\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}\left(\sum_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}\left(\sum_{j_3=1}^{n}a_{3j_3}\left(\cdots\left(\det(e_{j_1},e_{j_2},\cdots e_{j_n})\right)\cdots\right)\right)\right)$

$j_n$ 由原始决定，独立.

$=\underbrace{\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}}_{可提取出来}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(e_{j_1},e_{j_2},\cdots e_{j_n})$ → 交换后成 I

$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$

$(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示一个排列.
不能存在 $j_p=j_q$，
否则 $e_{j_p}=e_{j_q}$，使 $\det=0$.
故可以形成排列.

$$I=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \xleftrightarrow{m次行交换} \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}$$

$\therefore \det(e_{j_1},e_{j_2},\cdots e_{j_n})(-1)^{m}=\det(I)=1$.

交换次数 m：由逆序数决定，记作 $\tau$.

$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i$，$m_i$ 表示 $(x,i)$ 的逆序对.

即展开公式为 $\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$

可理解成每一行取不同列的数相乘.
总排列方式有 n! 种，即 n! 项.

### 3. 推论：$\det(AB)=\det A\det B$.

证明：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1+a_{n2}\beta_2+\cdots+a_{nn}\beta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}\beta_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}\beta_{j_n} \end{pmatrix}$$

同上运算.

$\det(AB)=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots\beta_{j_n})$

$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\det(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

$=\det(B)\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

⇓

$=\det(B)\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$=\det(B)\det(A)$.

## 四、应用

### 1. 计算普通行列式.

例 $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}$

注意 $A_{ij}$ 和 $M_{ij}$.
注意符号.
注意计算.

$$=\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}=(-1)(-7)\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

按r2展开 可变为3阶

也可消元

$$=\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 13 & -17 & -6 \\ -1 & 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}=(-1)(-1)\begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 13 & -17 & -6 \end{vmatrix}=(-7)\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 13 & -6 \end{vmatrix}$$

按r2展开 可变为2阶

### 2. 逆矩阵的求法.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $\det(A)\neq0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

证明：若 A 可逆，则 $A\cdot A^{-1}=I_n=A^{-1}A$.

$\therefore \det(A)\det(A^{-1})=1$，$\therefore \det(A)\neq0$.

若 $\det(A)\neq0$，则 $\frac{A^*}{\det(A)}$ 有意义.

其中 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix}$ 伴随方阵.

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots \ |A| \end{pmatrix}=|A|I_n.$$

→ 对角线：按i行展开的行列式. i=j.

$i\neq j$，$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0$

$$\begin{matrix} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

同理 $A^*A=|A|I_n$ 按列展开，道理一样.

$\therefore \frac{A^*}{\det(A)}A=A\cdot\frac{A^*}{\det(A)}=I_n$，A 可逆，$A^{-1}=\frac{A^*}{\det(A)}$

* 对定义逆 $AB=BA=I_n$，A、B 为方阵

有 $AB=I_n$，$\det(A)\neq0$，且 $A^{-1}=B$.

可得方阵 A 可逆.

* 行 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}|A|$ $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

列 $\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}|A|$.

### 3. Crammer 法则.

线性方程组表示为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

如果 $\det(A)\neq0$，则 A 可逆.

$Ax=b$，$A^{-1}Ax=A^{-1}b$，$x=A^{-1}b=\frac{A^*b}{\det(A)}=\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$

（$\Delta_i$ 为将 A 的第 i 列换为 b 的行列式）

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}b_iA_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n}b_iA_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}b_iA_{in} \end{pmatrix}$$

### 4. 例

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=\begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & \cdots & x+n-1 \\ 1 & x & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & & x \end{vmatrix}=(x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & & x \end{vmatrix}$$

按c1展开

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}(x+n-1)=(x+n-1)(x-1)^{n-1}.$$

例 $$\Delta_n(a_1,a_2,\cdots a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1-a_n & a_1^2-a_na_1 & \cdots & a_1^{n-1}-a_na_1^{n-2} \\ 1 & a_2-a_n & a_2^2-a_na_2 & \cdots & a_2^{n-1}-a_na_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n-1 & a_n^2-a_na_n & \cdots & a_n^{n-1}-a_na_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1-a_n & a_1(a_1-a_n) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_n) \\ 1 & a_2-a_n & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2-a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{(-1)^{1+n}\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_n)}_{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\Delta_{n-1}.$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{i=1}^{n-2}(a_n-a_i)\cdots\prod_{i=1}^{2}(a_3-a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}\ (a_2-a_1)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

例. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

差1 ↓ 减法.

主要 → 减法 倍 → 减法

行减 $$=\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

列减 $$=\begin{vmatrix} 1-x & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & x & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1-x & x & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x & x \\ x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & x \\ 0 & \cdots & & 0 & 1-x \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & & 0 \\ 1-x & x & & & \vdots \\ 0 & 1-x & \ddots & & \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)^n+x^n(-1)^{n+1}$$

例. $$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 0 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

加边法
要去掉1变成范德蒙式，
故加一行1，
保持值不变加行0.

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ -1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & & & \\ 0 & x_2 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^n \\ 1^0 & x_1 & & & x_1^n \\ 1 & x_2 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

例. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

想要列相减，处理列 → 加一列.

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & a_2+b_2 & & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & \cdots & & a_n \end{vmatrix}$$

为了消去 $b_i$.

剩这列，消去即为三角.

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & a_1 & & \cdots & 0 \\ 0 & & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)a_1\cdots a_n.$$

例. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

按行展开，代数余子式形式相似，用递归.

$$=2D_{n-1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=2D_{n-1}-D_{n-2}$$

$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1$.

$D_n-D_1=n-1$，$D_n=n$.