补充题+课后题

2021年9月29日 星期三 上午7:38

学习指导

1. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]^n$

$A^n=(I+N)^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2!}N^2 + \cdots = I+nN$

* $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ → 表示旋转角α的n次旋

2. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\4&4&-4\end{pmatrix}^{2006}$ → $\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\4\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha=(1\ 1\ -1)$

$=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\alpha=\beta\alpha$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

$A^{2006}=(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)=\beta(\alpha\beta)\cdots(\alpha\beta)\alpha=\beta(\alpha\beta)^{2005}\alpha$

$\alpha\beta=-1$. $A^{2006}=\beta(-1)\alpha=-\beta\alpha=-A$

3. $AB=BA$，A与B可交换，求可交换矩阵

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ (3) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

(1) $AB=BA$, $AB-B=BA-B$, $(A-I)B=B(A-I)$ … 即 $b_{11}=b_{22}$, $b_{21}=0$

(2) $\lambda_i b_{ij}=b_{ij}\lambda_j$, $(\lambda_i-\lambda_j)b_{ij}=0$, $b_{ij}=0$

∴ $B=\mathrm{diag}(b_{11},b_{22},b_{33})$

4. A 对称，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij}=a_{ji}$，$A^T=A$，$A^2=0$

5. $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}1&y&x+y\\1&x+y&x\\1&x&y\end{vmatrix}=-2(x^3+y^3)$

6. 奇数阶斜对称方阵行列式为0：$A^T=-A$，$\det(A^T)=\det(-A)$，$\det(A)=0$

7. $= x^n+(-1)^{n+1}y^n$

8. 偶数阶斜对称矩阵 $|A|=|a_{ij}|_{n\times n}$ 的所有元素的代数余子式 A_{ij} 之和为0.

9. $\Delta_n=(x-a)\Delta_{n-1}+a(x+a)^{n-1}$

$\Delta_n=a(x+a)^{n-1}+(x-a)\Delta_{n-1}=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)\Delta_{n-1}$

$=(a+b)\Delta_{n-1}-ab\Delta_{n-2}$

$=(x^2+1)\Delta_{n-1}-x^2\Delta_{n-2}$

$=(1-x)^n+(-1)^{n+1}x\cdot x^{n-1}$

10. （略）

11. $X=(X_1,X_2,X_3)_{1\times3}$，$B=(B_1,B_2,B_3)^T$

$AX=(AX_1,AX_2,AX_3)=(\lambda_1X_1,\lambda_2X_2,\lambda_3X_3)$

$XB=(X_1B_1+X_2B_2+X_3B_3)$

12. $AB=BA$，$\begin{pmatrix}A&B\\0&A\end{pmatrix}^n$

$=\sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k}\begin{pmatrix}0&B\\0&0\end{pmatrix}^k=C_n^0A^n+C_n^1A^{n-1}\begin{pmatrix}0&B\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^n&nA^{n-1}B\\0&A^n\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B&0\\0&A\end{pmatrix}$

14. (1) $\begin{pmatrix}0&-I_n\\A&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-A&0\\0&-A\end{pmatrix}$

习题课

1. $A_1\ldots A_n$ 为 n 个 n 阶上三角阵，A_i 的 $a_{ii}=0$，证明：$A_1A_2\cdots A_n=0$

2. $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$ … $a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n$

3. $A_{n\times n}$ 每行有2个元素为1，其余为0，J是元素全为1的n阶方阵，求 A^2 中(1,1)的元。

作业（10.12）

计算如下行列式

① $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} & & 1\\ & 2 & \\ n & & \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix}a&&&a\\&b&b&\\&c&&\\b&&&b\end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\a_2&a_3&0&0\\a_4&a_5&a_6&a_7\\a_8&a_9&a_{10}&0\end{vmatrix}$ ⑤ $\begin{vmatrix}5&-4&3&1\\7&0&3&2\\0&-1&-1&4\\-7&-6&0&3\end{vmatrix}$

$=28\times117-21\times114-63=-289$

2021-10-1
4 作业

10月14日作业

1. 教材 P114. 13. 14.

2. 证明如下结论

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}\beta_j\\\sum_{j=1}^n a_{2j}\beta_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^n a_{nj}\beta_j\end{pmatrix}$$

此处 β_i 分别代表 i 行行向量即 $1\times n$ 矩阵

$$(\gamma_1\ \gamma_2\ \cdots\ \gamma_n)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}=\left(\sum_{j=1}^n b_{j1}\gamma_j\ \sum_{j=1}^n b_{j2}\gamma_j\ \cdots\ \sum_{j=1}^n b_{jn}\gamma_j\right)$$

此处 γ_i 代表 i 列列向量即 $n\times1$ 矩阵

3. 证明：

$$\begin{vmatrix}by+az&bz+ax&bx+ay\\bx+ay&by+az&bz+ax\\bz+ax&bx+ay&by+az\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}$$

扫描全能王 创建

4. 设 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&-3&7\\1&1&2&1\\2&4&0&3\\2&-2&2&1\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{12}+2A_{13}-2A_{34}$

$=16$

5. 用完全展开式计算

$$\begin{vmatrix}a_1&0&b_1&0\\0&c_1&0&d_1\\b_2&0&a_2&0\\0&d_2&0&c_2\end{vmatrix}$$

例 4.3.10 $\det A=\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1+n}a_i M_{i+1,n}+(x+a_{n-1})M_{nn}$

扫描全能王 创建

11月2日作业

1. 证明：
若 A 为 m×n 矩阵，B 是 n×p 矩阵
则有 rank(A) + rank(B) ≤ n + rank(AB)
（提示：利用分块矩阵）

2. 讨论 a 的取值对矩阵 A 的影响
其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a&3\\1&a-2&-2&4\end{pmatrix}$

3. 讨论 $\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$ 的秩

及 P116. 37. 39. 42. 43.

课后题

1. 证明 加法、数乘运算律；证明 乘法运算律

3. $AB=\begin{pmatrix}-18&-11&-2\\30&11&-20\end{pmatrix}$

$ABC=(AB)C=\begin{pmatrix}28&-25\\8&93\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，$A^2=0$

7. $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta&\sin k\theta\\-\sin k\theta&\cos k\theta\end{pmatrix}$

8. 对称：$a_{ij}=a_{ji}$，$b_{ij}=b_{ji}$。AB对称 ⟺ $AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$

10. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与所有n阶方阵交换。

12. $(A_1A_2)^{-1}=(A_1^{-1}A_2^{-1})^{-1}$

23. (1) $=-372$ (2) $=-28$ (3) $=0$

(7) $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=AD-BC=\prod_{i=1}^n(a_id_i-c_ib_i)$

24. A 奇数阶反对称。$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$n=2k-1$，$a_{ij}=-a_{ji}$

$\det A^T=\det(-A)=(-1)^n\det A=-\det A$（矛盾）

26. (1) λA，$AA^*=\det(A)I$，$(\lambda A)^*=\lambda^{n-1}A^*$

27. $A^{-1}=\frac{A^*}{\det(A)}$，$AA^{-1}=I$

28. $A^{-1}=\frac{A^*}{\det(A)}$，$A^*A=\det(A)$

29. $\sum_{k=1}^n a_{ik}=0$，$\sum_{k=1}^n a_{kj}=0$

31. (1) $\Delta=12$，$\Delta_1=36$，$\Delta_2=-6$，$\Delta_3=24$

(2) $\Delta=27$，$\Delta_1=81$，$\Delta_2=-108$，$\Delta_3=-27$，$\Delta_4=27$；$x=(3,-4,-1,1)^T$

33. (1) $A^{-1}=\frac{A^*}{\det(A)}$

36. (3) $\begin{pmatrix}1&4&9&16\\4&9&16&25\\9&16&25&36\\16&25&36&49\end{pmatrix}$

37. $\det\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&a\\3&b&9\end{pmatrix}=(b-6)(a-6)$

i) $a=6,b=6$，rank A = 1 ii) $a=6,b\ne6$，rank A = 2 iii) $a\ne6,b=6$，rank A = 2 iiii) $a\ne6,b\ne6$，rank A = 3

39. ① rank A = n ② rank A = n−1 ③ rank A ≤ n−2

42. $\det(I_n-BA)=\det(I_m-AB)$

43. $\mathrm{rank}(I+A)+\mathrm{rank}(I-A)=n$

3.22 小测

① $=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(c-d+a-b)(c-d-a+b)$

② $=x^2y^2$

③ $=(-1)^{n+1}y^n+x^n$

④ $=(-1)(-1)^{n+1}2^n\cdot\frac{n(n-1)}{2}$

⑤ $|A|=\frac{1}{2\lambda_1}\times\frac{1}{2\lambda_2}-\frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$