行列式重开

2021年10月12日 星期二　上午11:40

1. 可按任意行展开（逐行展开）

例. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & n \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & & \\ n-1 & \cdots & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n (n-1) \cdots = (-1)^n (-1)^{n-1} \cdots$

例. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & & \\ x & y & \\ & \ddots & \ddots \\ & & x\ y \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & y & \\ & \ddots & \ddots \\ & & x \end{vmatrix}$

2. 行交换：$A \xrightarrow{r_p \leftrightarrow r_q} B$，$|A| = -|B|$

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} A_{pi} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{pi} M_{pi}$

记 D_{ij} 为 A 去掉第 p, q 行，第 i, j 列。

则为 M_{pi} 去掉第 q 行 j 列，$D_{ij} = D_{ji}$。

$|A|$ 按第 p 行展开 $= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{p+i} a_{pi} M_{pi}$

记 D_{ij} 为 $|A|$ 去掉第 p, q 行，去掉第 i, j 列。

$M_{pi} = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{q-1+j} a_{qj} D_{ij} + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{q-1+j-1} a_{qj} D_{ij}$

$|A| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{q+p+i+j-1} a_{pi} a_{qj} D_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{q+p+i+j} a_{pi} a_{qj} D_{ij}$（后一项改写为 $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1}$）

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{q+p+i+j-1} D_{ij} (a_{pi} a_{qj} - a_{pj} a_{qi})$.

同理，$|B| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{p+q+i+j-1} D_{ij} (a_{qi} a_{pj} - a_{qj} a_{pi})$

$\therefore |A| = -|B|$.

3. 可按列进行展开：$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$

按行：$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$

按列：$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$

与列发生联系，按第1列展开。

对其中的 a_{i1} 计算时，对 M_{1j} 去掉 $i-1$ 行 1 列。

对 $|A|$ 而言去掉 1, i 行、1, j 列，记为 N_{ij}。

$\therefore M_{1j} = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1+1} a_{i1} N_{ij}$（第1列各行 / i 行）

与行发生联系，按第1行展开。

对其中的 a_{1j} 计算时，对 M_{i1} 去掉 1 行 $j-1$ 列。

对 $|A|$ 而言去掉 1, i 行、1, j 列，同为 N_{ij}。

$\therefore M_{i1} = \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1+1} a_{1j} N_{ij}$（第1行各列 / j 列）

按行：$\det(A) = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{1j} a_{i1} N_{ij}$

按列：$\det(A) = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{i1} a_{1j} N_{ij}$

4. $|A| = |A^T|$.

$b_{ij} = a_{ji}$

去掉 a_{ij} 的余子式 M_{ij}；去掉 $a_{ij} = b_{ji}$ 的余子式 M_{ij}

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$. 按第 i 行展开，对 a_{ij}。

$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ji} M_{ij}$. 按第 i 列展开，对 b_{ji}。

5. $A \xrightarrow[\lambda c_i]{\lambda r_i} B$，$|B| = \lambda |A|$.

$B = \lambda A$，$|B| = \lambda^n |A|$.

三、行列式的完全展开式

1. 引入：线性函数，$y = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$.

满足性质 ① $f(\lambda x_1, x_2, \cdots x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \cdots x_n)$.

② $f(a_1 + a_2, x_2, \cdots x_n) = f(a_1, x_2, \cdots x_n) + f(a_2, \cdots x_n)$.

例如 $y = x_1 x_2 \cdots x_n$.

2. 完全展开式的计算方法.

$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \triangleq \det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ 表示为多元函数

$\alpha_i = (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$（每一项数×基本单位）

$\therefore \det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) = \det\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2}, \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$

$= \sum_{j_1=1}^{n} \det\left(a_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2}, \cdots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$ "加法分配" 行列式性质②

$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2}, \cdots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$ 提取系数 行列式性质①

$= \cdots = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \left(\sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} \left(\sum_{j_3=1}^{n} a_{3j_3} (\cdots (\det(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots e_{j_n}))\cdots\right)\right)$

$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots e_{j_n})$ j_n 由原的决定，独立。可提取出来

$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n) \in S_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$

$(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示一个排列。不能存在 $j_p = j_q$，否则 $e_{j_p} = e_{j_q}$，使 det = 0，故可以形成排列。

$I = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \xleftrightarrow{m\text{次行交换}} \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}$

$\therefore \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots e_{j_n}) (-1)^m = \det(I) = 1$.

交换次数 m：由逆序数决定，记作 τ.

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i$，$m_i$ 表示 $(\cdot, i)$ 的逆序对

即展开公式为 $\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n) \in S_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$

可理解成每一行取不同列的数相乘，总排列方式有 n! 种，即 n! 项。

3. 推论：$\det(AB) = \det A \det B$.

证明：$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \cdots + a_{nn}\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \beta_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} \beta_{j_n} \end{pmatrix}$

同上运算.

$\det(AB) = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \det(\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots \beta_{j_n})$

$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n) \in S_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \det(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

$= \det(B) \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n) \in S_n} (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

$= \det(B) \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n) \in S_n} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

$= \det(B) \det(A)$.

四、其他方阵，+例题

2. 逆矩阵的求法.

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

证明：若 A 可逆，则 $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} A$.

$\therefore \det(A)\det(A^{-1}) = 1$，$\therefore \det(A) \neq 0$.

若 $\det(A) \neq 0$，则 $\frac{A^*}{\det(A)}$ 有意义.

其中 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix}$ 伴随方阵.

$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots\ |A| \end{pmatrix} = |A| I_n$.

→ 对角线：按该行展开的行列式（$i = j$）。

$i \neq j$，$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$：把第 j 行换成第 i 行，得到两行相同的行列式 $= 0$.

同理 $A^* A = |A| I_n$ 按列展开，道理一样.

$\therefore \frac{A^*}{\det(A)} A = A \cdot \frac{A^*}{\det(A)} = I_n$，A 可逆，$A^{-1} = \frac{A^*}{\det(A)}$

※ 对于定义逆 $AB = BA = I_n$，A, B 为方阵

有 $AB = I_n$，$\det(A) \neq 0$，且 $A^{-1} = B$.

可得方阵 A 可逆.

※ 行 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} |A|$　$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

列 $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} |A|$.

3. Crammer 法则.

线性方程组表示为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

如果 $\det(A) \neq 0$，则 A 可逆.

$Ax = b$，$A^{-1}Ax = A^{-1}b$，$x = A^{-1}b = \frac{A^* b}{\det(A)} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$

（Δ_i 为将 A 的第 i 列换为 b 的行列式）

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{in} \end{pmatrix}$

4. 例 $\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}_{n \times n}$

$= \begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & \cdots & x+n-1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$

$= (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$

例 $\Delta_n(a_1, a_2, \cdots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ a_2 - a_n & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots \\ a_{n-1} - a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix}$

$= (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$

$(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$

$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \Delta_{n-1}$

$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \cdots \prod_{i=1}^{2} (a_3 - a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$

$= \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ 差1 → 减法.

差表→减法　行减 / 列减（移→减法）

$= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & & 0 & 1-x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 1-x & x & & \vdots \\ 0 & 1-x & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1-x & x \end{vmatrix}$

$= (1-x)^n + x^n (-1)^{n+1}$

例. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 0 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots \\ 0 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$

加边法：要去掉1变成范式，故加一行1，保持值不变加行0.

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ -1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots \\ -1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & & & \\ 0 & x_2 & & & \\ \vdots \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^n \\ 1^0 & x_1 & & & x_1^n \\ 1 & x_2 & & & \\ \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

$= 2 \prod x_i \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) - \prod_{1 \le i < j \le n+1} (a_j - a_i)$，（$a_{p+1} = x_p$，$a_1 = 1$）

例. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$

想要列相减，处理列。→ 加一列

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & a_2 + b_2 & & \cdots & b_2 \\ \vdots \\ b_n & b_n & b_n & & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & 0 & \cdots & & a_n \end{vmatrix}$

为了消去b. 利用列，消去即为三角.

$= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & a_1 & & & 0 \\ 0 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}\right) a_1 \cdots a_n$.

例. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

按行展开，代数余子式形式相似，用递归.

$= 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$

$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1$

$D_n - D_1 = n - 1$，$D_n = n$.