线性方程组

2021年9月14日 星期二　　上午8:43

一、数域

1. 定义：复数 C 的任意一个子集称为数集。

　　若数集 F 满足对四则运算封闭，则称数集 F 为数域。

　　最小数域 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2. 性质：数域中一定存有 0 和 1.

　例：证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+\sqrt{2}b \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 为数域。

　$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. 域的扩张.

　证明方法：验证四则运算。　　（抽象代数）

二、线性方程组

1. 定义：关于 $x_1, x_2 \dots x_n$ 的线性方程组，

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

　且所有数来自数域 F.

　系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
　m行n列

　增广矩阵 $\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} & b_1 \\ & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$
　m行n+1列.

2. 概念：a_{ij} 为系数，b_j 为常数.

　　常数项为零 → 齐次线性方程.
　　　不为零 → 非齐次线性方程.
　　一组解 → 全体解 → 解集 ⟨ 空：不相容；非空：相容.

3. 计算：Gauss 消元法.

　例. 解

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3 & ① \\ x_1+2x_2-5x_4=1 & ② \\ 2x_1+4x_2-3x_3-19x_4=6 & ③ \\ 3x_1+6x_2-3x_3-24x_4=7. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(-3)①\to④]{(-1)①\to②,\ (-2)①\to③} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3 & ⑤ \\ -3x_3-9x_4=4 & ⑥ \\ -9x_3-27x_4=-12 & ⑦ \\ -12x_3-36x_4=-16 & ⑧ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(-4)⑥\to⑧]{(-3)⑥\to⑦} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3 & ⑨ \\ -3x_3-9x_4=4 & ⑩ \end{cases}$$

　不妨设 $x_3=t_1$, $x_1=t_2$.　"自由的".

$$\therefore \begin{cases} x_1=t_2 \\ x_2=-\frac{43}{18}-\frac{1}{6}t_1-\frac{1}{2}t_2 \\ x_3=t_1 \\ x_4=-\frac{1}{3}t_1+\frac{4}{9} \end{cases}$$

① 初等变换 ⟨ 调整方程顺序.
　　　　　　乘上非零系数
　　　　　　乘上非零系数后加另一个方程.

② 原方程组的解适用于变换后的方程组，
　则可得有 $W_1\subseteq W_2$.
　初等变换过程可逆，则有 $W_2\supseteq W_1$
　∴ 变换前后解集 $W_1=W_2$，同解方程组.

4. Gauss 消元法矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -19 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & -24 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-2r_1\to r_3 \\ -3r_1\to r_4}]{\text{增广矩阵}\ -r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -36 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4r_2\to r_3]{-3r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

"自由的"
阶梯：x_2

5. 算法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{化为}}$$ 每行的首非零元一定都是零.（阶梯）

　第一列如有不为零的，否则 x_1 无了.
　把不为零的换上第一行.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ 0 & \vdots & \text{LOOP.} & \vdots & \\ 0 & & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

　找到前面不为0的
　开始消元计算. $-\frac{1}{a_{11}}\times a_{i1}r_1+r_i$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{2j_2} & \cdots & & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & & \text{标记} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rj_r} & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right)$$ → 标记 可不为0

　$d_{r+1}\neq 0$ 时，无解.
　$d_{r+1}=0$ 时，有解.
　r. 非零行个数，$r\le m$.
　每行首非零元的列号增加，
　　$1=j_1<j_2<j_3<\cdots<j_r\le n$. $\therefore r\le n$.
　$r=n$ 时，$j_r=r$, $j_n=n$（自然数）

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & c_{nn} & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \; 0 \end{pmatrix}$$ 唯一解.

　$r<n$ 时，$1=j_1<j_2\cdots j_r\le n$.
　　一个方程仅能决定一个 x，
　　但此时一个方程可能有多个 x.
　　故出现自由未知量 n-r 个.

6. 推论：① 齐次线性方程组一定有解，
　　　且 $r<n$ 时有无穷多组解.
　　② $m<n$ 的齐次线性方程组，
　　　有无穷多组解.