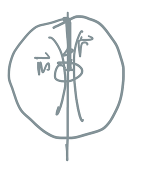
不熟的

2022年6月20日 星期一　　下午5:15

* 磁偶极矩． $\vec{B}=-\frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi r^3}+\frac{3\mu_0\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{4\pi r^5}$

5.6 假定地球的磁场是由地球中心的小电流环产生的，已知地面磁极（电流环轴线与地面的交点）附近磁场为 0.8G，地球半径 $R=6\times10^6\,\mathrm{m}$，求小电流环的磁矩.

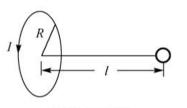


$\vec{B}=\frac{-\mu_0 r^2\vec{m}+3\mu_0 m r^2\vec{r}}{4\pi r^5}$

$=\frac{-\mu_0\vec{m}+3\mu_0 m\vec{e}_r}{4\pi r^3}=\frac{-\mu_0 m+3\mu_0 m}{4\pi r^3}\vec{e}_r$

$0.8=\frac{2\times\mu_0\times m}{4\pi\times 216\times10^{18}}$，$m=$

6.10 一抗磁质小球的质量为 0.10g，密度 $\rho=9.8\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，磁化率为 $\chi_m=-1.82\times10^{-4}$，放在一个半径 $R=10\mathrm{cm}$ 的圆线圈的轴线上且距圆心为 $l=10\mathrm{cm}$ 处（习题 6.10 图）. 线圈中载有电流 $I=100\mathrm{A}$. 求电流作用在这小球上力的大小和方向.



习题 6.10 图

线圈产生磁场 $\vec{B}(z)=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

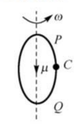
$\vec{B}=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}$.

磁化强度 $M=\chi_m H\approx\chi_m\frac{B}{\mu}=\chi_m\frac{B}{\mu_0(1+\chi_m)}\approx\frac{\chi_m B}{\mu_0}$　（$\chi_m\ll1$.）

小球磁矩 $m=MV$

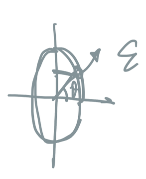
小球受力 $\vec{F}=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$

7.2 如习题 7.2 图所示，一个半径为 R 的圆线圈绕其直径 PQ 以角速度 ω 匀速转动. 在线圈中心沿 PQ 方向放置一个小磁体，它的磁矩为 $\boldsymbol{\mu}$. 试求在点 P 与 PQ 弧中点 C 之间的那段导线上产生的感应电动势.



习题 7.2 图

$\vec{B}=-\frac{\mu_0\mu\cos\theta}{2\pi r^3}\vec{e}_r-\frac{\mu_0\mu\sin\theta}{4\pi r^3}\vec{e}_\theta$



$\varepsilon=\int_0^l\vec{v}\times\vec{B}\,d\vec{l}$

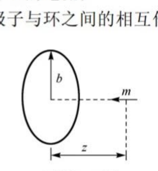
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\times\left(-\frac{\mu_0\mu\cos\theta}{2\pi r^3}\vec{e}_r-\frac{\mu_0\mu\sin\theta}{4\pi r^3}\vec{e}_\theta\right)\vec{e}_\theta R\,d\theta$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega\mu\mu_0\sin\theta\cos\theta}{2\pi R}d\theta=-\frac{\mu_0\mu\omega}{4\pi R}$.

8.4 把一磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 从无穷远移到一个理想导电环（具有零电阻）轴上一点，环半径为 b，自感为 L. 在终了位置上 $\boldsymbol{m}$ 的方向沿圆环的轴，与环心相距为 z. 当磁偶极子在无穷远处时，环上的电流为零，见习题 8.4 图.

（1）在终了位置时，计算环上的电流；

（2）计算此位置上的磁偶极子与环之间的相互作用能.



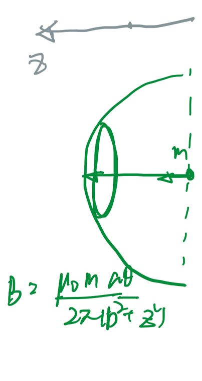
习题 8.4 图

$\vec{B}=-\frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi r^3}+\frac{\mu_0\vec{r}\cdot(\vec{m}\cdot\vec{r})}{4\pi r^5}$

$=-\frac{\mu_0 m\vec{e}_z}{4\pi\sqrt{z^2+b^2}^3}+\frac{\mu_0(z\vec{e}_z+b\vec{e}_r)zm}{4\pi(z^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}$

$=\frac{[\mu_0 z^2m-\mu_0(z^2+b^2)]\vec{e}_z+\mu_0 zmb\vec{e}_r}{4\pi(z^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}$

$=\frac{-\mu_0 b^2m\vec{e}_z-\mu_0 bzm\vec{e}_r}{4\pi(z^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}$



$B=\frac{\mu_0 m b^2}{2\pi(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{-\mu_0 m}{4\pi(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\iint(bz\vec{e}_r-b^2\vec{e}_z)\,dS$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\frac{rz\vec{e}_r-r^2\vec{e}_z}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot r\vec{e}_z\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{b^2}\frac{r^2}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\frac{1}{2}dr^2\,d\theta$

$=\frac{\mu_0 m}{4}\int_0^{b^2}\frac{r^2}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}dr^2$

$\Phi=\int(B_0\cdots)$

$=\frac{\mu_0 m}{2r_m}\sin^2\theta_m$

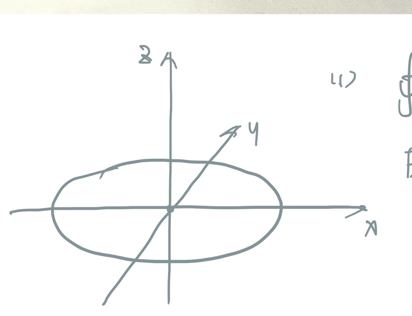
$=\frac{\mu_0 m b^2}{2(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

（1）一个半径为 a，非常薄（厚度为 b）的导体圆盘放置在 xy 平面上，导体的电导率为 σ，磁导率为 μ_0，原点在圆盘中心，空间加上磁场为：$\bar{B}=B_0\cos(\omega t+\varphi)\bar{e}_z$，请给出圆盘上半径为 r 处的涡流密度 j_f.　（6 分）

(2)请求出圆盘的总磁矩，并给出远处 P 点（$r\gg a$）由涡流产生的磁感应强度。（6 分）

（3）导体置于随时间变化的磁场中时，导体内部会出现“涡流”，即导体中自由电子在涡旋电场作用下形成的电流，涡旋电流又产生磁场，相当于一种“自激”效应。如果导体的电导率为σ，磁导率为μ_0，当涡流达到稳恒流动时（$\nabla\cdot\bar{j}_f=0$），请证明：涡流密度 j_f 满足以下方程：（5 分）

$$\nabla^2\bar{j}_f=\sigma\mu_0\frac{\partial\bar{j}_f}{\partial t}$$



(1) $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$.

$E\times2\pi r=-\frac{dB}{dt}\pi r^2=\omega B_0\sin(\omega t+\varphi)\pi r^2$

$E=\frac{\omega B_0\sin(\omega t+\varphi)r}{2}$

$j_r=\sigma E=\frac{1}{2}\sigma\omega Br\sin(\omega t+\varphi)$

(2) $\vec{m}=I\cdot S=\int_0^a\vec{j}_r\cdot d\vec{S}=\frac{1}{2}\sigma\omega B\sin(\omega t+\varphi)\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\,dr\,d\theta$

$=\frac{\pi a^3}{3}\sigma\omega B\sin(\omega t+\varphi)\vec{e}_z$.

$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}}{r^2}$，$\vec{B}=-\frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi r^3}+\frac{\mu_0\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{4\pi r^5}$

$dm=\pi r^2 dI=\pi r^2 j\,dr\,b$

$m=\int_0^a dm=\frac{1}{2}\sigma\omega B_0\pi b\sin(\omega t+\varphi)\int_0^a r^3dr$

$=\frac{1}{8}\pi\sigma\omega B_0 b a^4\sin(\omega t+\varphi)$

$\begin{cases}B_r=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m_r}{r^3}\\ B_\theta=\frac{\mu_0 m_\theta}{4\pi r^3}\end{cases}$

(3) $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\nabla\cdot\vec{j}=0$，$\vec{j}=\sigma\vec{E}$，$\nabla\times\vec{j}=-\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{j})=-\sigma\frac{\partial(\nabla\times\vec{B})}{\partial t}=-\sigma\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$

$-\nabla^2\vec{j}_r=-\sigma\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$

$w_2=\frac{1}{2\mu_0}B_{\ast}^2=\frac{1}{2\mu_0}(B_r^2+B_\theta^2)$

$=\frac{\mu_0 m^2\pi^2}{18}\frac{1}{r^6}(4\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{\mu_0 m^2\pi^2}{18}\frac{1}{r^6}(1+3\cos^2\theta)$.

$W_2=\int_R^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}w_2\,dV=\frac{4\pi\mu_0\pi^3}{27}m^2$.

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$，$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}=\frac{\vec{B}}{\mu_r\mu_0}$.

$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ 磁化率.

$M=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H}=\mu_r\vec{H}-\vec{H}$，$\chi_m=\mu_r-1$.

$$\begin{cases}\oiint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_V\rho_0\,dV & \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} & \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \oiint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0 & \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\,d\vec{S} & \nabla\times\vec{B}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

$\oiint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=0$　　$\nabla\cdot\vec{E}=0$

$\oiint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$　　$\nabla\cdot\vec{B}=0$

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$　　$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\iint_S\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$　　$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

$\Rightarrow\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.　　$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

$\nabla^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$.　　$\vec{B}=\vec{B}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.　　$v_p=\frac{\omega}{k}=c$

$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，$\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow E=cB=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H$.

$\vec{k}\times\vec{E}=\mu\omega\vec{H}$，$\vec{k}\times\vec{H}=-\varepsilon\omega\vec{E}$. $\sqrt{\varepsilon}E_0=\sqrt{\mu_0}H_0$.

介质电磁性质 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$. $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$. $\vec{j}=\sigma\vec{E}$.

电磁场能量 $w=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2+c^2B^2)$

$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int(E^2+c^2B^2)\,dV$.

能量变化　$\frac{dw}{dt}=\varepsilon_0(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+c^2\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$

$=-\varepsilon_0c^2\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})=-\nabla\cdot\vec{S}$

$\vec{S}=\varepsilon_0c^2\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{H}$.

能量密度的变化量.

$\vec{S}=wc\hat{k}$ 能流密度.　$(\mathrm{W/m^2})$

$=\frac{W}{V}\frac{m}{t}\hat{k}=\frac{P}{S}\hat{k}$ 功率通量.

动量密度　$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$.

旋转矢量　$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$.

复数表示　$a(t)=\mathrm{Re}(\tilde{A})=A\cos(\omega t+\varphi)$

$\tilde{A}=Ae^{i(\omega t+\varphi)}$

$\varepsilon=IR+\frac{1}{j\omega C}I+j\omega LI+j\omega MI$.

阻抗 $Z=\frac{V}{I}=\begin{cases}R\\ \omega L\\ \omega M\end{cases}$

能量密度 $w=\varepsilon E^2=\mu H^2$. $\Rightarrow$ 平均 $\bar{w}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2$　峰值

能流密度 $S=wv=wc$

动量密度 $g=\frac{1}{c^2}S=\frac{S}{c}$

$\Delta S\cdot c\cdot\Delta t(g_入+g_反)=c\cdot\Delta S\Delta t\frac{(S_入+S_反)}{c^2}$

反射系数 $R=\frac{S_反}{S_入}$　$=\frac{\Delta S\cdot\Delta t}{c}(1+R)S_入$

$=\Delta S\cdot\Delta t(1+R)w$

$S=\varepsilon E^2c$，$E=\sqrt{\frac{S}{\varepsilon c}}$.

$S=\mu H^2c$，$H=\sqrt{\frac{S}{\mu c}}$.

$\hat{n}\cdot(\vec{g}_反-\vec{g}_入)\Delta V=A\underset{(V)}{c\Delta t}\left(\frac{S_入}{c^2}+\frac{S_反}{c^2}\right)\cos\theta$

$=A\Delta t\left(\frac{S_入}{c}+\frac{S_反}{c}\right)\cos^2\theta$

单位面积受压强 $p=\frac{S_入+S_反}{c}\cos^2\theta.=\Delta w\cos^2\theta$.

每分钟. 每 $\mathrm{cm^2}$.　$W=1.94\,\mathrm{cal}$.

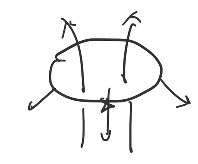
$S=\frac{W}{tA}=\frac{1.94}{60\mathrm{s}\times1\mathrm{cm^2}}$

五.

$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta\to\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$\vec{m}=\frac{1}{2}I\oint\vec{r}'\times d\vec{r}'\to\vec{m}=I\vec{S}$

$\vec{F}=\int Id\vec{l}\times\vec{B}$，$\tau=\int\vec{r}\times(Id\vec{l}\times\vec{B})$



$\Phi>0$　$\vec{F}=I\nabla\Phi=\nabla(I\Phi)=-\nabla U$.

F 指向磁通增加最快方向

小载流线圈. $\Phi\approx\vec{B}\cdot\vec{S}$，$\vec{F}=\nabla(I\vec{B}\cdot\vec{S})=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$

$\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}$　$=\frac{\partial(\vec{m}\cdot\vec{B})}{\partial x}=m\cdot\frac{\partial B}{\partial x}$

$=m_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+m_y\frac{\partial B_y}{\partial x}+m_z\frac{\partial B_z}{\partial x}$

$=m_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+m_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+m_z\frac{\partial B_x}{\partial z}$

$=\vec{m}\cdot\nabla B_x$

体心. 转矩.

恒 K. 平衡（连续）

轨道磁矩. $\mu=IS=\frac{q}{T}\pi R^2=\frac{1}{2}qRv$.

$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=mRv\hat{z}$. $\mu=\frac{q}{2m}L$

$V_H=R\frac{IB}{d}=\frac{1}{nq}\frac{IB}{d}$.

$\rightarrow R_H$.

六.

抗. 很弱. 每个分子. 所有

顺　很弱

铁　很强

大多数介质线性.

涡旋电场的力矩. $\vec{r}\times\vec{E}$ 在 q　$\lambda\,dl$

$L_z=\int_0^{+\infty}\tau\,dt$

$E_\theta=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial t}\times\vec{r}\right)$

七.

特征时间. $\frac{L}{R}$.　RC

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

八.

$W=\vec{m}\cdot\vec{B}$.

$\vec{F}=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{m}\times(\nabla\times\vec{B})$

$=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$.

$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}$.

九.

推迟效应.　$\lambda=\frac{c}{f}$.　$\lambda\gg l$

$\lambda\gg l$　可视为同时

$f\ll\frac{c}{l}$　似稳电流

$t\ll T$

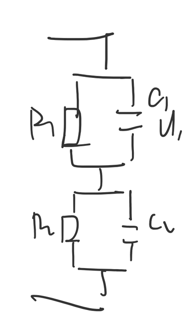
$Z_C=\frac{1}{\omega C}$　$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=-\frac{\pi}{2}$

$Z_L=\omega L$　$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=\frac{\pi}{2}$

品质.　$Q=\omega_0\frac{L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$　电压放大倍数

储能.　$W_1=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}Cu^2$　　共振时不变.

耗能　$W_2=I^2RT$.　　$Q=2\pi\frac{W_1}{W_2}$



$\lambda=\frac{2\pi}{k}$　$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$v_p=\frac{\omega}{k}\hat{k}=c$

$\vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$

$E=cB$，$\varepsilon E^2=\mu H^2$.

$P\propto\omega^4$

介质中 $D=\varepsilon E$. $B=\mu H$ - 仍不随 ε. 变化

$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{n}$.

$\begin{cases}\vec{E}=\frac{\mu_0p_0\omega^2}{4\pi}\sin\theta\cos\cdots\\ \vec{B}=\frac{\mu_0p_0\omega^2}{4\pi c}\sin\theta\cdots\end{cases}$

径向传播.

$\vec{S}=\frac{\mu_0p_0^2\omega^4}{16\pi^2c}\sin^2\theta\cdots\propto\omega^4$