磁能

2022年5月24日 星期二　　下午2:06

一、磁场的能量.

1. 与电场能类比.

$$W=\iiint \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV=\iiint\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV+\iiint\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}\,dV$$

$$W=\iiint\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\,dV=\iiint\frac{1}{2}\mu_0 H^2 dV+\iiint\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}\cdot\vec{M}\,dV.$$

2. 回路中的能量.

① RC　放电：$dQ=I^2R\,dt=R\frac{Q_0^2}{\tau^2}e^{-\frac{2t}{\tau}}dt$.

$\therefore Q=\int dQ=\frac{RQ_0^2}{2\tau}=\frac{Q_0^2}{2C}$.

充电：$\varepsilon=IR+\frac{Q}{C}$，$I=\frac{dQ}{dt}$

$P_\varepsilon=I\varepsilon=I^2R+\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt}=I^2R+\frac{d}{dt}(\frac{Q^2}{2C})$

② RL　放电：$dQ=I^2R\,dt=I_0^2Re^{-\frac{2t}{\tau}}dt$

$\therefore Q=\int dQ=\frac{\tau}{2}I_0^2R=\frac{1}{2}LI_0^2$

充电：$\varepsilon=L\frac{dI}{dt}+IR$

$P_\varepsilon=I\varepsilon=I^2R+LI\frac{dI}{dt}=I^2R+\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}LI^2)$

3. 磁能

① 电流（磁场）从无到有建立时

外界抵抗感应做的功.

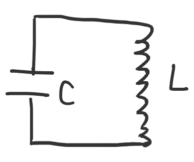
$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}\to 0$，$P=-I\varepsilon=I\frac{d\Phi}{dt}\to 0$.

② 单个载流线圈

$A=-\int I\varepsilon\,dt=\int I\,d\Phi=\int_0^{I_0}LI\,dI=\frac{1}{2}LI_0^2$.

$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}I\Phi$.

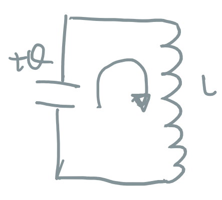
例. 电容C带电量 Q_0.



$t=0$时放电，线圈 L.

(1)求L内磁场能第一次等于C内电场能的时刻 t_1.

(2)求L内磁场能第二次到达极大值的时刻 t_2.



$I=\frac{dQ}{dt}$，$L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=0$.

$\therefore\frac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=0$，$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$Q(t)=Q_0\cos\omega t$，$I(t)=-\omega Q_0\sin\omega t$.

$\therefore$ 能量 $W_e=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q_0^2}{2C}\cos^2\omega t$，

$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{Q_0^2}{2C}\sin^2\omega t$.

$\therefore t_1=\frac{T}{8}=\frac{\pi}{4\omega}=\frac{\pi\sqrt{LC}}{4}$，$t_2=\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$.

③ 载流线圈系统.

$\Phi_i=\sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_j$

$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{N}M_{ij}\frac{dI_j}{dt}$

$P_i=-I_i\varepsilon_i=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}$

$\therefore P=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}$

$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(M_{ij}I_i\frac{dI_j}{dt}+M_{ji}I_j\frac{dI_i}{dt})$

$=\frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{N}(\frac{1}{2}M_{ij}I_iI_j)$

$W=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}M_{ij}I_iI_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}I_i\Phi_i$

④ 自能与互能

$W=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}M_{ij}I_iI_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}L_iI_i^2+\sum_{i<j}M_{ij}I_iI_j$.

$=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$.

⑤ 外场中的磁能.

$W=I\Phi=I\iint\vec{B}\cdot d\vec{S}$

均匀外场. $W=I\vec{B}\cdot\vec{S}=\vec{m}\cdot\vec{B}$.

$W=\sum_{k=1}^{N}I_k\iint\vec{B}\cdot d\vec{S}=\vec{m}_总\vec{B}_e$.

磁矩 × 磁场.

4. 做功与能量.

① $W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$.

∞处建立 I_1，I_2. $A_0=\frac{1}{2}I_1^2L_1+\frac{1}{2}I_2^2L_2$.

移 I_1 至终点. $A_1=0$

再移 I_2 至终点. A_2.

$A_{1总}=MI_1I_2$.

$A_{2I_0}=MI_1I_2$. $A_{2总}=MI_1I_2$.

② 互能.

载流线圈在外场中的互能：

维持电流不变时，移动线圈

外界抵抗安培力做功.

③ 小载流线圈：$U=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e$.

$\vec{F}=-\nabla U=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}_e)$

任意电流分布：$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}I_i\Phi_i$

$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}j\Delta\sigma_i\oint_{L_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}$

$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\oint_{L_i}\vec{j}\cdot\vec{A}\,dl\,\Delta\sigma_i$.

$W=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{j}\cdot\vec{A}\,dV$.

螺线管磁场：$B=\mu_0nI$，$\Phi=NBS=\mu_0n^2IlS$

$W=\frac{1}{2}I\Phi=\frac{B^2}{2\mu_0}V$.

能量密度 $w_e=\frac{B^2}{2\mu_0}$

二、磁介质存在时的磁场能.

1. 定义.

感应电动势 $\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}$.

介质的影响反映在 M 和 L 中.

例. 无限长螺线管

$H=nI$. $B=\mu_0\mu_r nI$.

$\Phi=NBS=\mu_0\mu_r NnIS=\mu_0\mu_r n^2IlS$

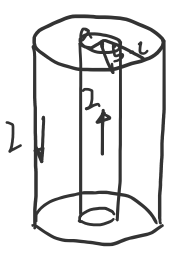
$L=\frac{\Phi}{I}=\mu_0\mu_r n^2V$.

$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu_0\mu_r n^2I^2V=\frac{1}{2}BHV$

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{B}\cdot\vec{H}\,dV=\iiint_V w_m\,dV.$$

2. 磁能求电感.

例.



中心半径为a的导线，外部内外径为b、c的圆筒，其间充满μ_r的介质，求单位长度的电感.

[illegible]

$$H=\begin{cases}\frac{1}{2\pi r}\frac{r^2}{a^2}I, & 0<r<a.\\ \frac{1}{2\pi r}I, & a<r<b\\ \frac{1}{2\pi r}(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2})I, & b<r<c\\ 0 & r>c\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}\frac{\mu_0 r}{2\pi a^2}I, & 0<r<a\\ \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi r}I, & a<r<b\\ \frac{\mu_0}{2\pi r}(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2})I, & b<r<c\\ 0, & r>c\end{cases}$$

$$w=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mu_0(\frac{r}{2\pi a^2}I)^2, & 0<r<a\\ \frac{1}{2}\mu_0\mu_r(\frac{1}{2\pi r}I)^2, & a<r<b\\ \frac{1}{2}\mu_0[\frac{1}{2\pi r}(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2})I]^2, & b<r<c\\ 0, & r>c\end{cases}$$

$W=\int_0^l dz\int_{r_1}^{r_2}r\,dr\int_0^{2\pi}w\,d\theta$　　$(\frac{c^2-r^2}{r})^2=\frac{c^4}{r^2}+r^2-2c^2$

$=2\pi l[\frac{1}{2}\mu_0(\frac{I}{2\pi a^2})^2\times\frac{1}{4}r^4\Big|_0^a+\frac{1}{2}\mu_0\mu_r(\frac{I}{2\pi})^2\times\ln r\Big|_b^a+$

$\frac{1}{2}\mu_0\mu_r(\frac{I}{2\pi(c^2-b^2)})^2(c^4\ln r\Big|_b^a+\frac{1}{4}r^4\Big|_a^b-c^2r^2\Big|_a^b)]$

$L=\frac{2W}{I^2}\times\frac{1}{l}=\frac{\mu_0}{2\pi}(\frac{1}{4}+\mu_r\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{(c^2-b^2)^2}[c^4\ln\frac{c}{b}-\frac{1}{4}(c^2-b^2)(3c^2-b^2)])$

计算自感

- 感应电动势　$L=-\frac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}}$
- 磁通量　$L=\frac{\Phi}{I}$
- 磁能　$L=\frac{2W_m}{I}$.