电磁感应

2022年5月12日 星期四 上午10:15

一、电磁感应定律.

1. 实验结论

感应电流 i 与 B 的变化有关.（非 H）.

B 变化快，i 大，方向性.

感应电动势 ε 更本质.

来自于磁通量 Φ 的变化.

2. 法拉第电磁感应定律.

$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$.

又 ε 来自非静电力 $\vec K$，$\varepsilon=\oint_L \vec K\cdot d\vec l=-\frac{d}{dt}\iint_S \vec B\cdot d\vec S$.

3. 方向：楞次定律.

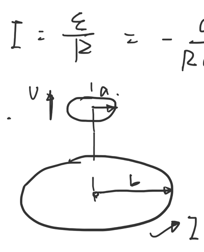
感应电动势方向：产生磁通阻碍磁通改变.

4. 大小

$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-B\frac{dS}{dt}$

$\psi=\sum_i\Phi$，$\varepsilon=-\sum_i\frac{d\Phi}{dt}$

$I=\frac{\varepsilon}{R}=-\frac{d\Phi}{Rdt}$，$q=\int_{t_1}^{t_2}I\,dt=\frac{\Phi_1-\Phi_2}{R}$

例. 

半径分别为 a 和 b（b>>a）的线圈. b 中有电流 I，a 沿 z 轴以 v 向上运动，求其中 ε.

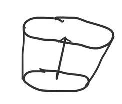
$\vec B=\hat z\frac{\mu_0 I b^2}{2(b^2+z^2)^{\frac32}}$

$\Phi=B\pi a^2$，$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\partial B}{\partial z}\frac{dz}{dt}\pi a^2$

$=\frac{3\pi a^2 b^2}{2}\frac{\mu_0 I z v}{(b^2+z^2)^{\frac52}}$.

二、动生电动势和感生电动势.

1. 动生电动势

① 闭合回路 

$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\Phi_2-\Phi_1}{dt}=\frac{\Phi_{切}}{dt}=\frac{\oint\vec B\cdot d\vec S}{dt}$

$=\frac{\oint\vec B\cdot d\vec l\times\vec v\,dt}{dt}=\oint\vec K\cdot d\vec l=\oint\vec v\times\vec B\cdot d\vec l$

$\vec K=\vec v\times\vec B$. 非静电力为洛伦兹力沿导线的分力.

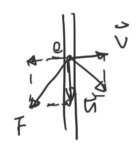
② 一段导体

切割磁力线运动. $\varepsilon=\int\vec K\cdot d\vec l=\int(\vec v\times\vec B)\cdot d\vec l$

> 平移：$\varepsilon=(\vec v\times\vec B)\cdot\int d\vec l=(\vec v\times\vec B)\cdot\vec L$

> 转动：$\varepsilon=\int(\vec v\times\vec B)\cdot d\vec l=-\int_0^L\omega rB\,dr=-\frac12 B\omega L^2$

2. 洛伦兹力不做功.



3. 感生电动势

① $\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint\vec B\cdot d\vec S=-\iint\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d\vec S$.

$\varepsilon=\oint\vec K\cdot d\vec l=\iint\nabla\times\vec K\cdot d\vec S$.

$\therefore\nabla\times\vec K=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

② 产生：涡旋电场.

$\nabla\times\vec E_{涡}=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}$ / $\oint_L\vec E\cdot d\vec l=-\iint_S\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d\vec S$

变化 B 产生，电场线闭合.

③ 涡旋电场的高斯定理

$\vec E_{总}=\vec E_{静}+\vec E_{涡}$

$\oint\vec E_{总}\cdot d\vec S=\frac{q}{\varepsilon_0}=\oint\vec E_{静}\cdot d\vec S$，$\therefore\oint\vec E_{涡}\cdot d\vec S=0$.

$\nabla\cdot\vec E_{涡}=0$，$\nabla\times\vec E_{涡}=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

④ 静电场－涡旋电场的规律.

$\vec E_{静}=-\nabla\varphi$.

$\vec B=\nabla\times\vec A$，$\therefore\nabla\times\vec E_{涡}=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}=-\frac{\partial\nabla\times\vec A}{\partial t}=\nabla\times(-\frac{\partial\vec A}{\partial t})$

库仑规范，$\vec E_{涡}=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}$.

$\therefore\vec E=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec A}{\partial t}$.

⑤ 涡旋电场的计算.

S1. $\oint\vec E_{涡}\cdot d\vec l=-\iint_S\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d\vec S$.

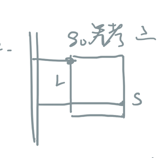
S2. $\vec A=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec j\,dV'}{r}$，$\vec E_{涡}=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}$.

例. 无限长载流直导线通有 $I(t)$.

S1. $\vec B=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat\phi$.

$\vec A=\hat z(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln s+const)$,

$\vec E_{涡}=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}=\hat z\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s$.

S2. 

$\oint_L\vec E\cdot d\vec l=E(s,t)L-E(s_0,t)L$

$\oint\vec B\cdot d\vec S=-\int_{s_0}^{s}\frac{\mu_0 I}{2\pi s}L\,ds$.

$\therefore\oint_C\vec E\cdot d\vec l=-\frac{d}{dt}\iint_S\vec B\cdot d\vec S$,

$\therefore\vec E=\hat z[\frac{\mu_0 dI}{2\pi dt}\ln\frac{s}{s_0}+E(s_0,t)]$.

默认不考虑 I 产生电场的传播（v=c）.

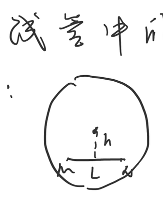
$t=\frac{s}{c}\ll\frac{...}{...}$，电流变化足够缓慢.

例. 半径为 a 的无限长螺线管中的电流变化 $\frac{dI}{dt}=k$. 求：

(1) 管内外 $E_{涡}$.

(2) 管内导体 MN 的电动势，长 L，距 h.

(3) 求 M、N 的电压.



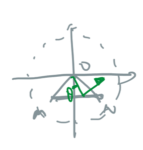
(1) $B=\mu_0 nI$（螺线管）.

$\therefore\frac{dB}{dt}=\mu_0 nk$，且 $E_{涡}$ 有柱对称.

$E_{涡}=-\frac{1}{2\pi r}\times\frac{dB}{dt}\cdot S=\begin{cases}\frac12\mu_0 nkr, & r<a\\ \frac12\mu_0 nk\frac{a^2}{r}, & r\ge a.\end{cases}$

/ $\vec A=\begin{cases}\frac12\mu_0 nIr\hat\phi, & r<a\\ \frac12\mu_0 nI\frac{a^2}{r}\hat\phi, & r\ge a\end{cases}$

$\therefore\vec E_{涡}=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}=\begin{cases}\frac12\mu_0 nks\hat\phi, & r<a\\ \frac12\mu_0 nk\frac{a^2}{s}\hat\phi, & r>a.\end{cases}$

(2) 

OMN 回路中，OM、ON 段无 ε，MN 同 OMN. 与 $E_{涡}$ 垂直.

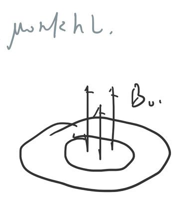
$\Phi=\vec B\cdot\vec S=-BS=-\frac12 BhL$.

$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=\frac12\mu_0 nkhL$.

/ $\varepsilon=\int_M^N\vec E_{涡}\cdot d\vec l=\int_M^N\frac r2\frac{dB}{dt}\sin\theta\,dl$

$=\frac12\frac{dB}{dt}hL$

(3) $\varepsilon_{MN}=\frac12\frac{dB}{dt}hL>0$，$U_{MN}=-\frac12\mu_0 nkhL$.

例. 带电圆环转动. 

$\oint_C\vec E_{涡}\cdot d\vec l=-\frac{d\Phi}{dt}=-\pi a^2\frac{dB}{dt}>0$.

力矩 $\tau=b\lambda\oint E_{涡}dl=-b\lambda\pi a^2\frac{dB}{dt}$.

角动量 $L=\int_0^\infty\tau\,dt=$

例. 圆形电流环在任意 P 处的 $E_{涡}$.

4. 麦克斯韦方程.

① 电：总电场 $\oint_S\vec E\cdot d\vec S=\frac{Q_{内}}{\varepsilon_0}$

$\oint_L\vec E\cdot d\vec l=-\frac{d}{dt}\iint_S\vec B\cdot d\vec S$.

⇒ $\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，$\nabla\times\vec E=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}$.

② 磁：$\oint_S\vec B\cdot d\vec S=0$，$\oint_L\vec E\cdot d\vec l=-\iint_{S_1}\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d\vec S$.

$\therefore\oint_S\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d\vec S=\iiint_V\nabla\cdot\frac{\partial\vec B}{\partial t}dV=\iiint_V\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec B)=0$.

⇒ $\nabla\cdot\vec B=0$.

5. 相对性原理.

① 坐标系变换 ⇒ 力的表达式中 E、B 变换.

② E 与 B 的相对性.

不同 v 的参考系下观察到不同的场.

6. 应用.

① 涡流 〈 应用：加热，探测；减少：高电阻，叠层硅片.

② 阻尼，加速

③ 趋肤效应.

④ 电子感应加速器.

⑤ 偏电.

三、互感和自感.

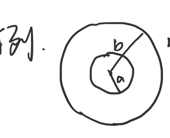
1. 互感.

① 一个线圈中 I 变化，另一个线圈产生互感.

② 互感系数. $\psi_{21}=M_{21}I_1$ ⇒ $M_{21}=\frac{\psi_{21}}{I_1}$

$\varepsilon_{21}=-\frac{d\psi_{21}}{dt}=-M_{21}\frac{dI_1}{dt}$ ⇒ $M_{21}=\frac{\varepsilon_{21}}{...}$

③ 对称性：$M_{12}=M_{21}$.

例. 

两圆环半径 a<<b，b 中通 I.

(1) 求互感系数 M.

(2) 若 a 中通 $I_a=I_0\sin\omega t$，求 ε_b.

(1) $M=\frac{\Phi}{I}$，计算 a/b 中的磁通数.

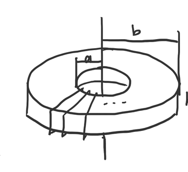
故计算前者：b 在 a 处产生的 B.

$B_{0a}=\frac{\mu_0 I}{2b}$（近似为匀强）

$\Phi_a=\frac{\mu_0 I\pi a^2}{2b}$，$M=\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}$.

(2) $\varepsilon_b=-\frac{d\Phi_{ba}}{dt}$ → a 在 b 处产生的 B 不好求

$M=\frac{\Phi_b}{I}$，$\varepsilon_b=\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}I_0\omega\cos\omega t=\frac{\mu_0\pi a^2\omega}{2b}...$

例. 总线圈匝数 N，截面为长方形. 求其与对称轴上无限长载流直导线的互感系数 M. 

计算线/管的磁通 ⇒ 管中更好算.

$B=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$\psi=\int_a^b\frac{N\mu_0 Ih}{2\pi r}dr=\frac{N\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\frac ba$.

$\therefore M=\frac{\psi}{I}=\frac{N\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac ba$.

例. 长为 l，总匝数 N_1 的长直螺线管外有 N_2 匝线圈，试求互感. 

内 N_1 在外 N_2 的 B 更好求.

$B_{21}=\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$，$\psi_{21}=\frac{N_2\mu_0 N_1 I_1 S}{l}$

$\therefore M_{21}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}$.

④ 由几何特性、介质特性决定.

2. 自感.

① I 变化时，自身 Φ 变，产生自感.

$L=\frac{\psi}{I}$. $L=M_{11}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec l_1\cdot d\vec l_2}{r_{12}}$

② 方向：看电流增减？

③ 计算：理想时，B 均匀通过每一圈.

$\psi=N\Phi=NBS=\mu_0 n^2 IlS$.

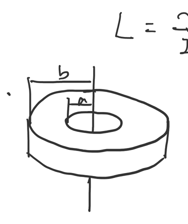
$\therefore L=\mu_0 n^2 lS=\mu_0(\frac{N}{l})^2V$.

非理想时，每匝 Φ 有不同.

$\psi=n_1\Phi_1+n_2\Phi_2+\cdots=\sum n_i\Phi_i$

$=N\sum\frac{n_i I}{NI}\Phi_i$

$L=\frac{\psi}{I}=\frac1I\sum n_i\Phi_i$

例. 

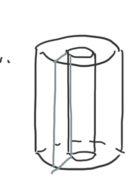
计算总匝数为 N，截面为长方形的螺绕管的自感.

若通 I 的电流，内部 $B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

$\Phi=\int_a^b\frac{\mu_0 NIh}{2\pi r}dr=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac ba$.

$\psi=N\Phi=\frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\ln\frac ba$

$L=\frac{\psi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac ba$

例. 计算同轴电缆单位长度的 L. 

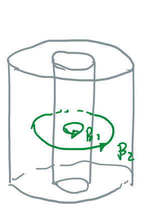
内层通 I，外层通 I.

层内 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

$\psi=\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi r}h\,dr=\frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\frac ba$.

单位长度 $L_0=\frac{\psi}{Ih}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac ba$.

3. 自感系数的定义.

例. 同轴电缆的自感. 

$B=\begin{cases}\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}r, & r<a\\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & a<r<b\end{cases}$

$\psi_1=\iint\frac{I'}{I}B_1 dS=\int_0^a\frac{r^2}{a^2}\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}rh\,dr$

$=\frac{\mu_0 Ih}{2\pi a^4}\int_0^a r^3dr=\frac{\mu_0 Ih}{8\pi}$

$\psi_2=\iint B_2 dS=\frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\frac ba$

$\psi=\psi_1+\psi_2$

$L_0=\frac{\psi}{Ih}=\frac{\mu_0}{2\pi}(\frac14+\ln\frac ba)$

4. 自感 & 互感的关系

① 无漏磁条件下 $\Phi_{21}=\Phi_{11}$，$\Phi_{12}=\Phi_{22}$.

互感 $M=\frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}=\frac{N_1\Phi_{12}}{I_2}$.

自感 $L_1=\frac{N_1\Phi_{11}}{I_1}$，$L_2=\frac{N_2\Phi_{22}}{I_2}$.

⇒ $M=\sqrt{L_1L_2}$.

一般 $M=k\sqrt{L_1L_2}$，$k\le1$.（描述耦合）

② 线圈系统的电感

第 i 个线圈的磁通 $\Phi_i=\sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}I_j$.

$M_{ij}=M_{ji}$，$L_i=M_{ii}$ ⇒ 对称阵.

$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{N}M_{ij}\frac{dI_j}{dt}$.

5. 线圈的联结

同名端 & 异名端.

① 串联. $I_1=I_2=I$

顺接，B 加强，$L=L_1+L_2+2M$.

反接，B 减弱，$L=L_1+L_2-2M$.

$\Phi_1=\Phi_{11}+\Phi_{12}=L_1I_1\pm MI_2=(L_1\pm M)I$，$\Phi_2=(L_2\pm M)I$.

$\Phi=\Phi_1+\Phi_2=(L_1+L_2\pm2M)I=LI$.

$L\ge0$，$\therefore M\le\frac{L_1+L_2}{2}$.

理想耦合 $L=(\sqrt{L_1}\pm\sqrt{L_2})^2$，无耦合 $L=L_1+L_2$，$M=0$

② 并联. $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2$，$I_1+I_2=I$.

$\varepsilon=-(L_1\dot I_1+M\dot I_2)=-(L_2\dot I_2+M\dot I_1)$

$\therefore(L_1-M)\dot I_1=(L_2-M)\dot I_2$.

又 $\dot I=\dot I_1+\dot I_2$，$\dot I_1=\frac{L_2-M}{L_1+L_2-2M}\dot I$.

$\therefore\varepsilon=-\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}\dot I=-L\dot I$.

同名端相接，$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$.

异名端相接，$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$.

$L\ge0$，$M\le\sqrt{L_1L_2}$

无耦合时 $\frac1L=\frac1{L_1}+\frac1{L_2}$.

四、似稳电路和暂态过程.

1. 似稳电路

① 非稳恒电流，但变化缓慢.

$\frac{1}{f}\gg\frac{l}{c}$ ⇒ $\frac{c}{f}\gg l$ ⇒ $\lambda\gg l$.

电路对电场的响应不存在时间.

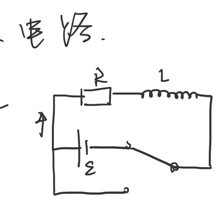
② 各元件作用.

电感：$V_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=L\frac{dI}{dt}$（阻碍电流改变）

电阻：$V_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=IR$

电容：$V_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=\frac{Q}{C}$

2. 暂态电路.

① RL 

$L\frac{dI}{dt}+IR=\varepsilon$，$I(0)=0$

得 $I(t)=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

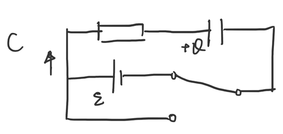
充磁：以指数趋于稳值，$I_\infty=\frac{\varepsilon}{R}$.

特征时间 $\tau=\frac{L}{R}$，$I(\tau)=I_\infty(1-e^{-1})=0.63I_\infty$.

$L\frac{dI}{dt}+IR=0$，$I(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$

放磁：以指数趋于零.

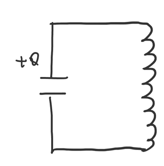
$t=\tau$，$I(\tau)=0.37I_0$.

② RC 

$IR+\frac QC=R\frac{dQ}{dt}+\frac QC=\varepsilon$

$Q(0)=0$，$Q(t)=C\varepsilon(1-e^{-\frac{t}{RC}})$

特征时间 $\tau=RC$.

③ LC 

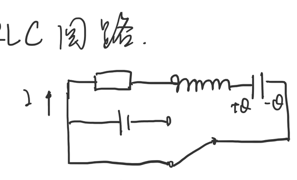
$L\frac{dI}{dt}+\frac QC=L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac QC=0$

$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{LC}=0$，$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$Q(t)=Q_0\cos\omega_0 t$，$I(t)=-\omega_0 Q_0\sin\omega_0 t$

LC 振荡. $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}$. Q 滞后 I.

$f=\frac1T=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

④ RLC 回路. 

$L\frac{dI}{dt}+IR+\frac QC=0$，$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac RL\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=0$.

记 $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，$\gamma=\frac{R}{2L}$. $Q(0)=Q_0$，$I(0)=0$

$\gamma<\omega_0$ 欠阻尼.

$Q=Q_0e^{-\gamma t}(\cos\omega t+\frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t)$

$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$.

$\gamma>\omega_0$ 过阻尼.

$Q=Q_0e^{-\gamma t}(\cosh\Omega t+\frac{\gamma}{\Omega}\sinh\Omega t)$

$\Omega=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$.

$\gamma=\omega_0$ 临界阻尼.

$Q=Q_0e^{-\gamma t}(1+\gamma t)$