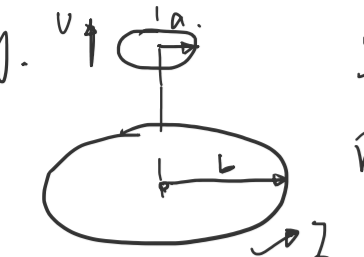


例题

2022年5月28日 星期六 下午5:41

一. 感应电动势

例.  半径分别为 a 和 b (b >> a) 的线圈, b 中有电流 I, a 沿 z 轴以 v 向上运动, 求其中 ε.

例. 无限长载流直导线通有 I(t), 求 E 程.

默认不考虑 I 产生电场的传播 (v=c).
t = 1/2 << ε₀, 电流变化足够缓慢.

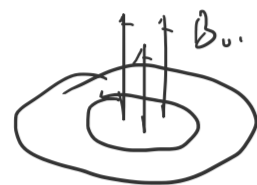
例. 半径为 a 的无限长螺线管中的电流变化 $\frac{dI}{dt} = k$. 求:

(1) 管内外 E 程.

(2) 管内导体 MN 的电动势, 长 L, 距 h.

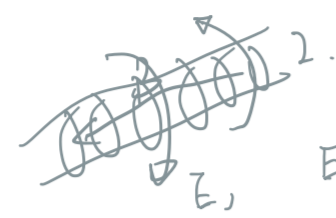
(3) 求 M, N 的电压.

例. 带电圆环转动.



$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

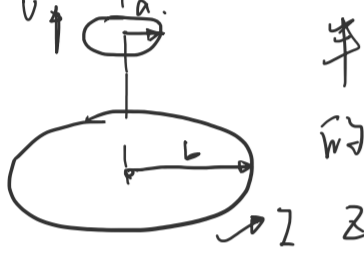
$$\epsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_0^L \mu_0 I r dr = \frac{\mu_0 I L}{2} \frac{dI}{dt}$$



$$E_{\text{轴}} = \int_0^L \mu_0 I r dr = \frac{\mu_0 I L^2}{2}$$



$$\epsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^L \mu_0 I r dr = \frac{1}{2} \mu_0 I r^2$$

例.  半径分别为 a 和 b (b >> a) 的线圈, b 中有电流 I, a 沿 z 轴以 v 向上运动, 求其中 ε.

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Phi = B \pi a^2, \quad \epsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial B}{\partial t} \pi a^2 = \frac{3\pi a^2 b^2}{2} \frac{\mu_0 I}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

例. 无限长载流直导线通有 I(t).

$$S_1: \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{A} = \int \vec{B} \times d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln s + \text{const.}$$

$$\vec{E}_{\text{感}} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln s.$$

$$S_2: \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{\text{感}} L = E_{\text{感}} \ln s = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L dr$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{L} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln s + E_{\text{感}} \right]$$

默认不考虑 I 产生电场的传播 (v=c).
t = 1/2 << ε₀, 电流变化足够缓慢.

例. 半径为 a 的无限长螺线管中的电流变化 $\frac{dI}{dt} = k$. 求:

(1) 管内外 E 程.

(2) 管内导体 MN 的电动势, 长 L, 距 h.

(3) 求 M, N 的电压.


(1) $B = \mu_0 n I$ (螺线管).

$\epsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n k$, 且 E 程存在对称.

$$E_{\text{感}} = - \frac{1}{2\pi r} \times \frac{d\Phi}{dt} \cdot \delta = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 n k r, & r < a \\ \frac{1}{2} \mu_0 n k \frac{a^2}{r}, & r > a \end{cases}$$

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 n I r \vec{e}_\phi, & r < a \\ \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{a^2}{r} \vec{e}_\phi, & r > a \end{cases}$$

$$\vec{E}_{\text{感}} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 n k r \vec{e}_\phi, & r < a \\ \frac{1}{2} \mu_0 n k \frac{a^2}{r} \vec{e}_\phi, & r > a \end{cases}$$

(2)  MN 回路中, \vec{E} 与 $\vec{E}_{\text{感}}$ 垂直. \vec{v}_M, \vec{v}_N 相反, \vec{v} 同 MN.

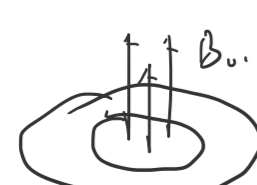
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = - B S = - \frac{1}{2} B h L.$$

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \mu_0 n k h L.$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^L \frac{1}{2} \mu_0 n k h s \omega ds = \frac{1}{2} \mu_0 n k h L$$

(3) $\epsilon_{MN} = \frac{1}{2} \mu_0 n k h L > 0$, $U_{MN} = - \frac{1}{2} \mu_0 n k h L$.

例. 带电圆环转动.



$$\oint \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = b \int \epsilon ds = - b \int \frac{d\Phi}{dt} ds.$$

$$\vec{E} = 0, \quad L = \int_0^{\infty} z dt = 0.$$

二. 自感与互感

例.  圆环半径 a << b, b 中通 I.

(1) 求互感系数 M.

(2) 若 a 中通 $I_a = I_0 \sin \omega t$, 求 ε.

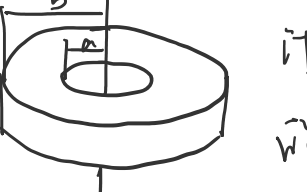
例. 长螺线管, 线圈匝数 N, 截面为长方形, 求其与

对称轴上无限长载流直

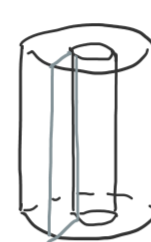
导线的互感系数 M.

例. 长为 L, 总匝数 N₁ 的长螺线管

外有 N₂ 匝线圈, 试求互感.

例.  计算匝数为 N, 截面为长方形的螺线管的自感.

例. 计算同轴电缆单位长度的 L.



例.  圆环半径 a << b, b 中通 I.

(1) 求互感系数 M.

(2) 若 a 中通 $I_a = I_0 \sin \omega t$, 求 ε.

(1) $M = \frac{\Phi}{I}$, 计算 a/b 中的磁通量.

取轴线的: b 在 a 处产生的 B.

$$B_{ab} = \frac{\mu_0 I}{2b} \quad (近似为轴线)$$

$$\Phi_a = \int \vec{B}_{ab} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I a^2}{2b}$$

(2) $\epsilon_b = \frac{d\Phi_{ba}}{dt}$ → a 在 b 处产生的 B 不好算

$$M = \frac{\Phi_a}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \times I_0 \omega \cos \omega t = \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega}{2b} \sin \omega t.$$

例. 长螺线管, 线圈匝数 N, 截面为长方形, 求其与

对称轴上无限长载流直

导线的互感系数 M.

例. 计算匝数为 N, 截面为长方形的螺线管的自感.

$$B = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 N I h}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\therefore M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

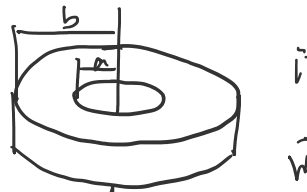
例. 长为 L, 总匝数 N₁ 的长螺线管

外有 N₂ 匝线圈, 试求互感.

例.  计算匝数为 N, 截面为长方形的螺线管的自感.

$$B_{a1} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}, \quad \Phi_{21} = \frac{N_2 \mu_0 N_1 I_1 S}{l}$$

$$\therefore M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}$$

例.  计算匝数为 N, 截面为长方形的螺线管的自感.

若通 I 的电流, 内部 $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 N I h}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\Phi = N \Phi = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

例. 计算同轴电缆单位长度的 L.

内层通 I, 外层通 I.

$$\text{层内 } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{单位长度 } L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

ε = dΦ/dt

$$B = \int \frac{\mu_0 I b d\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 I}{2b} \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} I, \quad M = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}$$

$$\epsilon = \frac{d\Phi}{dt}$$

7.9 在一个半径为 10cm, 截面积为 12cm² 的铁环上均匀地绕有 1200 匝绝缘导线, 环上有一宽度为 1mm 的气隙. 设铁的相对磁导率是 700, 它与磁场强度无关, 且忽略磁滞效应.

- (1) 当有 1A 的电流通过线圈时, 求气隙中的磁场;
- (2) 计算该线圈的自感系数.



$$(1) NI = B \left(\frac{2\pi r}{\mu_0 \mu_r} + \frac{2d}{\mu_0} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r + \mu_r d}$$

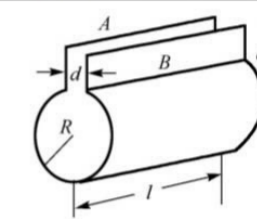
$$(2) NI = \frac{\Phi}{\mu_0} \left(\frac{2\pi r}{\mu_r} + \frac{2d}{\mu_0} \right)$$

$$L = \frac{N^2 \Phi}{I} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r}{2\pi r + \mu_r d}$$

7.10 一块铜片被弯成如习题 7.10 图所示形状, 已知 R = 2cm, l = 10cm, a = 2cm, d = 0.4cm. 求

- (1) A, B 间管状区的自感系数;
- (2) 输入端 A 和输出端 B 铜片之间的电容;
- (3) 整个构件的共振频率.

《电磁学与电动力学 (第二版)》习题解答



习题 7.10 图

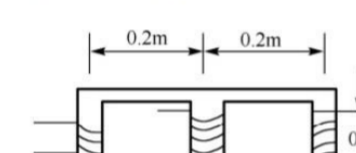
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B = \mu_0 I = \frac{\mu_0 I}{l}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \dots$$

7.11 一个变压器如习题 7.11 图所示, 线圈 A, B, C 的匝数分别为 500, 1000, 500, 截面积分别是 0.005m², 0.001m², 0.0005m², 铁芯的水平臂截面积是 0.002m², 如果芯的相对磁导率 μ = 10000, 求:

- (1) 线圈 A 和 C 间的互感;
- (2) 线圈 A 和 B 间的互感.



习题 7.11 图

图 7.11a

$$R_1 = 0.2 \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.2}{10000} = 2 \times 10^{-5} \Omega$$

$$R_2 = 0.1 \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.1}{10000} = 1 \times 10^{-5} \Omega$$

$$R_3 = 0.1 \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.1}{10000} = 1 \times 10^{-5} \Omega$$

$$R_4 = 0.1 \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.1}{10000} = 1 \times 10^{-5} \Omega$$

$$R_5 = 0.1 \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.1}{10000} = 1 \times 10^{-5} \Omega$$

$$R_6 = 0.1 \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.1}{10000} = 1 \times 10^{-5} \Omega$$

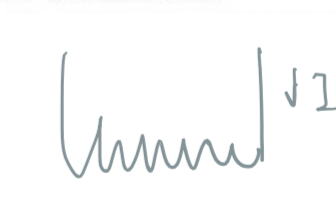
$$\Phi = \frac{NI}{R} = \frac{500 I}{2 \times 10^{-5}} = 2.5 \times 10^7 I$$

$$\Phi_1 = N_1 \Phi = 500 \times 2.5 \times 10^7 I = 1.25 \times 10^{10} I$$

$$\Phi_2 = N_2 \Phi = 1000 \times 2.5 \times 10^7 I = 2.5 \times 10^{10} I$$

$$\Phi_3 = N_3 \Phi = 500 \times 2.5 \times 10^7 I = 1.25 \times 10^{10} I$$

7.14 空心螺线管长为 0.5m, 截面为 1cm², 匝数为 1000. 忽略边缘效应, 它的自感多大? 一个 100 匝的副线圈也绕在这个螺线管的中部, 互感多大? 现有 1A 的稳恒电流流入副线圈, 螺线管连接着 10³Ω 的负载. 如果上述稳恒电流突然停止, 将有多少电荷流过电阻?



$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

$$\Phi_1 = B S_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l} I_1$$

$$L = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l}$$

$$\Phi_2 = B S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l} I_1$$

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l}$$