知识点

2022年5月3日 星期二　　下午3:20

静磁场中的磁介质

一、磁场对电流的作用.

1. 磁场对电流的力和力矩

磁场对电流的力 $\vec F=q\vec v\times\vec B$. $\vec F=\oint_L I d\vec l\times\vec B$. $\vec F=\iint_S \vec i\times\vec B dS$. $\vec F=\iiint_V \vec j\times\vec B dV$.

力矩 $\vec L=\oint_L I\vec r\times(d\vec l\times\vec B)$ $\vec L=\iint_S \vec r\times(\vec i\times\vec B)dS$, $\vec L=\iiint_V \vec r\times(\vec j\times\vec B)dV$.

外磁场 $\vec B$ = 总磁场 $\vec B_t$ - 电流磁场 $\vec B_i$ (电流元的磁感应强度, 适用于体/面).

2. 举例. ① 1的磁场 $B_1=\frac{\mu_0}{2\pi r_0}I_1$ 受 $F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_0}$

② $\vec F=\oint I d\vec r\times\vec B=(\oint d\vec r)\times I\vec B=0$ $\Rightarrow \vec L=\vec m\times\vec B$. $\vec F=(\vec m\cdot\nabla)\cdot\vec B$

$\vec L=\oint I\vec r\times(d\vec r\times\vec B)=\oint \frac{1}{2}(\vec r\times d\vec r)\times\vec B+\frac{1}{2}d[\vec r(\vec r\cdot\vec B)]-\vec B(\vec r\cdot d\vec r)=\frac{I}{2}(\oint\vec r\times d\vec r)\times\vec B$

③ $B_外=0$. $B_内=\mu_0 nI$. 受作用面元 $i=nI$, 其外磁场 $\frac{1}{2}\mu_0 nI$. $\Delta F=\frac{\mu_0 nIi}{2}=\frac{\mu_0 n^2I^2}{2}$

二、磁介质及磁化强度M.

1. 磁化强度.

已磁化物质的磁性来自规则排列的分子电流.

ΔV 内分子磁矩矢量和为 $\Sigma\vec m$, 定义 $\vec M=\frac{\Sigma\vec m}{\Delta V}$ 为磁化强度 (单位体积分子磁矩之和)

非磁化状态下, $\vec m=0$ 或 $\vec m$ 杂乱使 $\Sigma\vec m=0$. $\vec M$ 可表示单位体积物质的磁性.

2. 磁化电流

磁化状态下分子电流有序排列而产生的宏观电流.

分子平均磁矩 $\vec m_a=\frac{\Sigma\vec m_{分子}}{n\Delta V}$, $\vec M=n\vec m_a$.

$\vec m_a$ 等效于一个分子电流 I_a、面积矢量 $\vec S_a$ 产生, $\vec m_a=I_a\vec S_a$.

跨越L的分子电流对 $\Sigma I'$ 有贡献. $S_a\cos\theta\, dl$ $I_a n S_a\cos\theta dl=n\vec m_a\cdot d\vec l=\vec M\cdot d\vec l$.

积分得穿过S的总磁化电流 $\oint_L\vec M\cdot d\vec l=\Sigma I'$. 介质均匀磁化, $\vec M\oint_L d\vec l=0$.

取面元与矩形. $\oint_L\vec M\cdot d\vec l=\Sigma I'$, $M_z L=i_y L$, $M_z=i_y$.

$\oint_L\vec M\cdot d\vec l=\Sigma I'$, $-M_y L'=i_z L'$, $-M_y=i_z$. $\therefore \vec i=\vec M\times\vec n$.

三、磁介质中的静磁场基本定理.

磁化强度分布 → 磁化电流分布 → $\vec B_总=\vec B_0+\vec B'$ → $\oiint_S\vec B\cdot d\vec S=0$, $\oint_L\vec B\cdot d\vec l=\mu_0\Sigma I_0+\mu_0\Sigma I'$.

均匀磁化, 磁化I'在表面, $i'=M$. $B'=\frac{\mu_0 i'}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)=\frac{\mu_0 M}{2}\left(\frac{l_1}{\sqrt{R^2+l_1^2}}+\frac{l_2}{\sqrt{R^2+l_2^2}}\right)$

磁场强度 $\vec H=\frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M$, $\oint_L\vec H\cdot d\vec l=I_0$.

四、介质的磁化规律.

1. 介质分类

线性各向同性磁介质. $\vec M=\chi\vec H$, $\vec B=\mu\vec H$, $\mu=\mu_0(1+\chi)$ 磁导率. χ 磁化率.

① 顺磁质 $\chi>0$, $\mu>\mu_0$. 抗磁质 $\chi<0$, $\mu<\mu_0$. 顺磁质 $\chi_m=\frac{C}{T}$.

② 铁磁质 磁化曲线, $B=\mu_0(H+M)$. 磁滞回线. 硬磁. 软磁.

③ 亚铁磁质和反铁磁质.

2. 介质磁化的微观机制

① 顺磁质 分子固有磁矩 $\vec m_0$ 不为零, 磁化时 $\vec m_0\times\vec B$

分子数密度 n_0, 单位体积中磁矩 $\vec m_0$ 方向在 $\theta\sim\theta+d\theta$ $\varphi\sim\varphi+d\varphi$ 的分子数目 $dn(\theta,\varphi)$.

无外磁场: $dn(\theta,\varphi)=n_0\frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}$, $dn(\theta)=\frac{n_0}{2}\sin\theta d\theta$. 有外磁场: $dn(\theta)=Ce^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}\sin\theta d\theta$

磁矩分子势能 $\varepsilon_p=-\vec m_0\cdot\vec B=-m_0B\cos\theta$. $M=\int m_0\cos\theta\, dn(\theta)=\frac{n_0m_0^2}{3kT}B$, $\vec M=\frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT}\vec H$.

② 抗磁质 分子固有磁矩为0, 在外磁场作用下产生与外磁场相反的磁化强度.

电子轨道磁矩 $\vec m=-\frac{er^2}{2}\vec\omega$, 在B中受力矩 $\vec L=\vec m\times\vec B\propto m_e r^2\vec\Omega\times\vec\omega$, 进动角速度 $\vec\Omega=\frac{e}{2m_e}\vec B$.

$\Delta\vec m=-\frac{er^2}{3}\vec\Omega=-\frac{e^2r^2}{6m_e}\vec B$. $\chi_m=-\frac{\mu_0 n_0 Ze^2}{6m_e}\bar{r^2}$.

③ 亚铁磁质和铁磁质.

3. 无限均匀线性各向同性介质中的静磁场.

① $2\pi rH=I$, $H=\frac{I}{2\pi r}$. $B=\mu H=\frac{\mu I}{2\pi r}$.

② $2\pi RH=NI$. $H=\frac{NI}{2\pi R}$ $B=\frac{\mu NI}{2\pi R}$.

B比真空增加了 $\frac{\mu}{\mu_0}$ 倍. 总电流 $\Sigma I=\Sigma I_0+\Sigma I'=(\frac{\mu}{\mu_0})\Sigma I_0$.

H线. 各向同性磁介质, $\vec H\parallel\vec B$. $\oint\vec H\cdot d\vec l\neq0$, 与传导电流线环绕.

五、边值关系和唯一性定理.

1. 磁介质界面上的边值关系.

$\vec n\cdot(\vec B_2-\vec B_1)=0$, $B_\perp$ 连续. $\vec i'=\vec n\times(\vec M_2-\vec M_1)$ 磁化面电流密度. $\vec n\times(\vec H_2-\vec H_1)=\vec i_0=0$, $H_\parallel$ 连续.

2. 静磁场唯一性.

满足 $\oiint_S B_n dS=0$ (高斯定理), 磁介质线性各向同性, 传导电流分布已知 ⇒ 唯一B.

3. 分区均匀线性各向同性介质中的静磁场.

① 介质界面与磁感应界面重合. $\vec H=\frac{\vec B_0}{\mu_0}$, $\oint\vec B_0\cdot d\vec l=\mu_0\Sigma I_0$ (对称), $\vec B_r=\mu_r\vec H$.

$B_0=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B_内=\frac{\mu}{\mu_0}B_0=\frac{\mu I}{2\pi r}$, $B_外=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $i'=M_内-M_外=\frac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$

② 介质界面与磁感应线垂直: 去掉介质算出 $\vec B_0$, $\vec B=\alpha\vec B_0$, $\alpha=\frac{\Sigma I_0}{\oint\frac{\vec B_0}{\mu}\cdot d\vec l}$, $\vec H_i=\frac{1}{\mu_i}\vec B$.

$\frac{\pi r}{\mu_1}B+\frac{\pi r}{\mu_2}B=I$. $B=\frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$. $H_1=\frac{B}{\mu_1}$, $H_2=\frac{B}{\mu_2}$. $M_1=\frac{1}{\mu_0}B-H_1$, $M_2=\frac{1}{\mu_0}B-H_2$

磁化面电流 $i'=M$, 传导面电流 $i_0=H$.

去掉介质. $B_{0y}=\frac{\mu_0 Iz}{2\pi}\left(\frac{1}{(y-a)^2+z^2}-\frac{1}{(y-a)^2+z^2}\right)$, $B_{0z}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y-a}{(y-a)^2+z^2}+\frac{y+a}{(y+a)^2+z^2}\right)$

$\alpha=\frac{\Sigma I_0}{\oint\frac{\vec B_0}{\mu}\cdot d\vec l}=\frac{2I}{(\mu_1^{-1}+\mu_2^{-1})\oint_L\vec B_0\cdot d\vec l}=\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_0(\mu_1+\mu_2)}$

六、磁像法.

1. 介质平面为无限平面. 不同区域像电流.

2. 介质界面为无穷长圆柱面 阿氏圆?

七、磁路定理与应用.

1. 基本方程.

$\oiint\vec B\cdot d\vec S=0$ → $\oiint\vec j\cdot d\vec S=0$

$\vec B=\mu\vec H$ → $\vec j=\sigma(\vec E+\vec E')=\sigma\vec E'$

$\oint\vec H\cdot d\vec l=\varepsilon_m=\Sigma I_0$ → $\oint\vec E\cdot d\vec l=\oint\vec E'\cdot d\vec l=\varepsilon$

R_m(磁阻)$=\oint\frac{dl}{\mu S}$ $R=\oint\frac{dl}{\sigma S}$

$\Phi_B=BS$, $\varepsilon_m=\Phi_B R_m$ $\varepsilon=IR$

2. 磁路定理的应用

① 穿有线圈的闭合铁芯. 磁感线在铁芯界面发生折射

$B_1\cos\theta_1=B_2\cos\theta_2$, $H_1\sin\theta_1=H_2\sin\theta_2$. $\tan\theta_2=(\frac{\mu_2}{\mu_1})\tan\theta_1$, $B_2=\left(\frac{1+(\frac{\mu_2}{\mu_1})^2\tan^2\theta_1}{1+\tan^2\theta_1}\right)^{\frac{1}{2}}B_1$

$\mu_1\gg\mu_2$, $\theta_1\neq0$, 磁感应线与界面平行, 磁通量集中在铁芯内部.

② 带气隙的铁芯回路. 载流线圈提供磁动势 $\varepsilon=NI_0=\Phi_B(R_{m1}+R_{m2})$

铁芯磁阻 $R_{m1}=\frac{l}{\mu S}$, 气隙磁阻 $R_{m2}=\frac{d}{\mu_0 S}$.

八、磁荷法.

1. 磁荷观点下的静磁场规律.

$\oiint\vec H\cdot d\vec S=\frac{1}{\mu_0}\Sigma q_m$, $\oint\vec H\cdot d\vec l=0$, 磁势 φ_m 满足 $\vec H=-\nabla\varphi_m$.

磁偶极子 $p_m=q_m l$, $\vec H=\frac{\vec p_m}{4\pi\mu_0 r^3}+\frac{3(\vec p_m\cdot\vec r)\vec r}{4\pi\mu_0 r^5}$, $\vec L=\vec p_m\times\vec H$, $\vec F=(\vec p_m\cdot\nabla)\vec H_0=\nabla(\vec p_m\cdot\vec H_0)$. 对应元电流环.

磁极化 $\vec J=\frac{\Sigma\vec p_m}{\Delta V}$, $\oiint\vec J\cdot d\vec S=-\Sigma q_m'$, $\sigma_m'=\vec J\cdot\vec n$, $\vec J=\chi_m\mu_0\vec H$. 磁感应强度 $\vec B=\mu_0\vec H+\vec J$, $\oiint\vec B\cdot d\vec S=0$, $\vec B=\mu\vec H$.

2. 磁荷法与电流法的等效性

$\vec J=\mu_0\vec M$, $\vec B=\mu_0\vec H$. 磁荷法, $\oint\vec H\cdot d\vec l=0$; 电流法, $\oint\vec H\cdot d\vec l=\Sigma I$.

磁荷法适用于无传导电流的单连通空间; 有传导电流, 寻找磁荷分布.

3. 磁荷法的应用

① 端面磁化表面 $\sigma_m=J=\mu_0 M$. $F_c=-2\frac{\sigma_m^2 S}{2\varepsilon_0}=-\frac{\sigma_e^2 S}{\varepsilon_0}$, $F_m=-\frac{\sigma_m^2 S}{\mu_0}=-\mu_0 M^2 S$

② 面元dS磁偶极矩 $p_m=\sigma_m d\,dS$ $\mu_0 I dS=\sigma_m d\,dS$, $I=\frac{\sigma_m d}{\mu_0}$

$H=\frac{I}{2\pi r}=\frac{\sigma_m d}{2\pi\mu_0 r}$, $E=\frac{\sigma_e d}{2\pi\varepsilon_0 r}$