静磁场的磁介质

2022年5月3日 星期二　　下午3:01

一、物质的磁性.

1. 抗磁与顺磁.

2. 磁介质

   μ 解释磁性.

3. 抗磁性：电子轨道运动.

   顺磁性

4. 磁场中的磁介质.

① 分子 → 分子电流. 固有磁矩.

② 磁化：外场中的磁介质，分子电流因受到外场作用而发生偏转，介质中出现宏观束缚电流

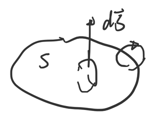
即出现磁化电流.

③ 磁化强度. $M=\frac{\sum \mu}{\Delta V}$.

单位体积内分子磁偶极矩矢量和.

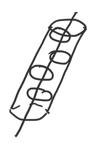
$\vec{M}=n\mu_a$，单位 A/m (与面电流同)

④ 磁化电流：套链.



跨套在曲线的电流环对磁化电流有贡献.

$dI'=nI_a dV=nI_a S_a|\cos\theta|dl$.



$dI'=\vec{M}\cdot d\vec{l}$，$I'=\oint_C \vec{M}\cdot d\vec{l}$.

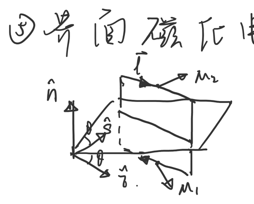
$\therefore$ S内 $I'=\iint_S \vec{j}'\cdot d\vec{S}=\oint_{C=\partial S} \vec{M}\cdot d\vec{l}$.

磁化电流体密度. $\vec{j}'=\nabla\times\vec{M}$.

均匀磁化，$\vec{M}$=常矢量，$\vec{j}'=\nabla\times\vec{M}=0$.

即内部电流为零，界面上有电流.

⑤ 界面磁化电流.



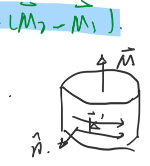
$\oint_C \vec{M}\cdot d\vec{l}=\vec{M}_2\cdot l(\hat{\tau})+\vec{M}_1\cdot(-l\hat{\tau})$

$I'=K'l\cos\theta=l\vec{K}'\cdot\hat{s}=l\vec{K}'\cdot(\hat{n}\times\hat{\tau})$

$\therefore(\vec{K}'\times\hat{n})\cdot\hat{\tau}=(\vec{M}_2-\vec{M}_1)\cdot\hat{\tau}$

$\therefore \vec{K}'\times\hat{n}=\vec{M}_2-\vec{M}_1$，$\vec{K}'=\hat{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)$.

介质2为真空. $\vec{K}'=\vec{M}\times\hat{n}$.



二、磁介质的静磁场基本定理.

1. 静磁场基本定理.

① 高斯定理.

$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$. $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\oiint_S (\vec{B}_0+\vec{B}')\,d\vec{S}=0$.

$\nabla\cdot\vec{B}=0$，磁场法向分量连续.

磁荷的存在.

② 环路定理.

$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I_内=\mu_0 I_{内0}+\mu_0 I_内'$

$I_内'=\oint_C \vec{M}\cdot d\vec{l}$，$\therefore\oint_C(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M})\cdot d\vec{l}=I_{0内}$.

定义H矢量 $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_内$，

仅与总传导电流有关.

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$. $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$

真空中 $\vec{B}=\vec{B}_0=\mu_0\vec{H}$. $B=\mu_0 nI$，$H=nI_0=K$.

介质内 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0$.

边值关系 $\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{K}_0$.

2. $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$，$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0$

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$，$\vec{j}'=\nabla\times\vec{M}$，$\vec{i}'=\vec{M}\times\hat{n}$.

例.

$\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=2\pi rH=NI_0$. $H=\frac{NI_0}{2\pi r}$

外部磁场 $B_0=\mu_0 nI_0=\mu_0 H$，

$\therefore B=\mu_0(H+M)=B_0+\mu_0 M$.

3. 磁荷 → 类比电荷.

$\vec{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}$，$k=\frac{1}{4\pi\mu_0}$. $\vec{H}=\frac{q}{4\pi\mu_0 r^2}\vec{e}$

磁极化 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{J}$.

适用于没有电流的单连通空间.

二、磁介质的静磁场基本定理.

1. 静磁场基本定理

① 高斯定理.

$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$，$\oiint\vec{B}\cdot d\vec{S}=\oiint(\vec{B}_0+\vec{B}')\cdot d\vec{S}=0$，

$\nabla\cdot\vec{B}$ 磁场散度为零，法向分量连续.

磁荷仍存在.

② 环路定理

$\oint_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_C(\vec{B}_0+\vec{B}')\,d\vec{l}=\mu_0 I_内=\mu_0(I_0+I')$

$I'=\oint_C\vec{M}\cdot d\vec{l}$，$\therefore\oint(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M})\,d\vec{l}=I_0$

∴定义 $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$，$\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_0$.

$\vec{H}$ 仅与传导电流有关.

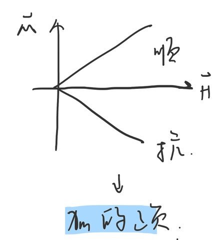
三、介质的磁化规律.

1. 弱磁性.

$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$

$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$

$=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}$.



χ_m 的正负.

μ_r-1 的正负.

2. 顺磁性的磁化.

原子有固有磁矩.

有外场时外场 $U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ 与温度 kT 决定其定向排列的程度.

磁制冷.

3. 铁磁性.

$\chi_m=\chi_m(H)$　复杂关系

强磁性. M与H非线性

居里点、临界温度.

磁滞回线.

四、磁路定理.

1. 弱磁介质中.

$\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}$.　$\vec{K}=\hat{n}\times(\vec{B}_2-\vec{B}_1)/\mu_0$

$\vec{M}=\chi_m\vec{H}=(\mu_r-1)\vec{H}$　$\vec{K}'=\hat{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)$.

2. 折射定律.

① B法向连续　$B_{1n}=B_{2n}$，$\mu_1H_{1n}=\mu_2H_{2n}$

H切向连续　$H_{1\tau}=H_{2\tau}$，$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1}=\frac{B_{2\tau}}{\mu_2}$.

$\therefore\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}}=\frac{H_{2n}}{H_{1n}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$.

如果 $\mu_1>\mu_2$，则 $B_1>B_2$ (提 θ_1. θ_2).

$H_1<H_2$ (提 θ_1. θ_2)

如果 $\mu_1\gg\mu_2$，则 $\tan\theta_1\gg\tan\theta_2$，$\theta_2\to0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

② 与电流类比.

稳恒 $j_{1n}=j_{2n}$.

环路 $E_{1\tau}=E_{2\tau}$，$\frac{j_{1\tau}}{\sigma_1}=\frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}$

$\therefore\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{j_{1\tau}}{j_{2\tau}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

如果 $\mu_1\gg\mu_2$，则 $\tan\theta_1\gg\tan\theta_2$，$\theta_1=\frac{\pi}{2}$，$\theta_2=0$.

③ 静磁屏蔽.

磁感应线折射 ⇒ 空腔内不受外场B.

$B_内=\frac{4\mu_r b^2}{(\mu_r+1)^2b^2-(\mu_r-1)^2a^2}=\frac{4}{1-\frac{a^2}{b^2}\mu_r}\vec{B}$.

$\mu\uparrow$. 内部B减小至忽略.

3. 磁路

① 铁磁性物质做成闭合回路铁芯，其中磁场为磁路.

② 磁路中的磁通 { 主磁通 / 漏磁通.

近似：忽略漏磁 / 边缘效应.

③ 基尔霍夫磁路定律.

$\oiint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ ⇒ $\sum_i \Phi_i=0$.

$NI_0=\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum H_i l_i$

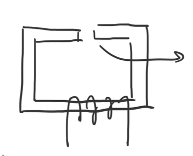
$=\sum_i\frac{B_i l_i}{\mu_i}=\sum_i\Phi_i\frac{l_i}{\mu_i S_i}$ ⇒ $\varepsilon_m=\sum_i\Phi_i R_{mi}$.

磁动势 $\varepsilon_m=NI$。

磁势降 $U_m=\Phi R_m$

磁阻 $R_m=\frac{l}{\mu S}\to\int\frac{dl}{\mu S}$

④ 例.



空隙，忽略漏磁.

求其中的B.

$\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int\frac{1}{\mu_r\mu_0}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\int\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot d\vec{l}$

$=B(\frac{l}{\mu_r\mu_0}+\frac{l_0}{\mu_0})$

$=\Phi_m(\frac{l}{\mu_r\mu_0 S}+\frac{l_0}{\mu_0 S})=NI$.

$r_m=\frac{l}{\mu_0\mu_r S}$，$R_m=\frac{l_0}{\mu_0 S}$. $\varepsilon_m=\Phi_m(R_m+r_m)$

$B=\frac{\Phi}{S}=\frac{\mu_r\mu_0 NI_0}{l+\mu_r l_0}$　改变 l_0，改变B.

与线圈绕法无关.

"铁芯"将B增强.

五、唯一性定理.

1. 基本规律.

$\oiint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$　$\vec{M}=(\mu_r-1)\vec{H}=\frac{(\mu_r-1)}{\mu_0\mu_r}\vec{B}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0\mu}\vec{B}$

$\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_{0内}$.　$(\vec{M}=\chi_m\vec{H}=(\mu_r-1)\vec{H})$.

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$. $\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}$.

2. 唯一性定理.

磁介质各向同性 (均匀 μ_i 或非均 $\mu_i(r)$)

传导电流密度已知.

边值条件 { 无穷大，B. H→0. / 有限大，B. H 给定

⇒ 解出的B唯一.

应用：磁像法.

3. 有介质的磁场.

① 同种磁介质充满 B≠0 的空间.

相比无介质时：$\vec{H}=\vec{H}_0$. $\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu_r\vec{B}_0$

$\vec{j}=\mu_r\vec{j}_0$，$\vec{j}'=\chi_m\vec{j}_0$

$\vec{K}=\mu_r\vec{K}_0$，$\vec{K}'=\chi_m\vec{K}_0$.

② 分区均匀磁介质

> 介质界面平行于B

$\vec{H}=\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$，$\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0$

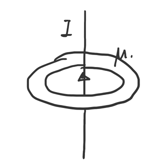
$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r}=\frac{\vec{B}}{\mu}$

$\because\oiint\vec{H}\cdot d\vec{S}=\oiint\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$，$\therefore\vec{H}=\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$.

$\vec{H}=\vec{H}_0$，$\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0$，$\vec{j}=\mu_r\vec{j}_0$. $\vec{j}'=\chi_m\vec{j}_0$.

面电流无简单比例关系.

例. 圆环状磁介质与无限长载流直导线共轴，求介质内外空间的B分布和表面磁化电流.

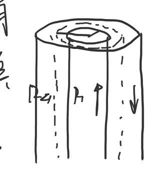


$H\cdot2\pi r=I$

$B_内=\frac{\mu I}{2\pi r}$　$B_外=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

$\vec{i}'=\vec{M}\times\hat{n}=(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi r}$

例. 同轴导体圆柱面通有反向电流，二者之间填充了 μ_1. μ_2. μ_3 三种介质，半径 R_1. R_2. R_3，求各区域B.



无介质时 $B_0=\begin{cases}0 & r>R_4 \text{ 或 } r<R_1.\\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & R_1<r<R_4.\end{cases}$

介质面与B平行，$\vec{H}=\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$，$\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0$

$\therefore$有介质时 $\vec{B}=\begin{cases}0 & r<R_1 \text{ 或 } r>R_4\\ \frac{\mu_i\mu_0 I}{2\pi r}, & R_i<r<R_{i+1}.\end{cases}$

$\vec{K}'=\vec{n}_{i\to i-1}\times(\vec{M}_i-\vec{M}_{i-1})$

$=\vec{n}_{i\to i-1}\times((\mu_i-1)\vec{H}-(\mu_{i-1}-1)\vec{H})$

$=\vec{n}_{i\to i-1}\times(\mu_i-\mu_{i-1})\vec{H}$

$=\vec{n}_{i\to i-1}\times\frac{(\mu_i-\mu_{i-1})}{\mu_i\mu_0}\vec{B}$

$=\vec{n}\times\frac{(\mu_i-\mu_{i-1})I}{2\pi r}$

$=\begin{cases}\frac{(\mu_1-1)I}{2\pi R_1} & r=R_1\\ \frac{(\mu_2-\mu_1)I}{2\pi R_2} & r=R_2\\ \frac{(\mu_3-\mu_2)I}{2\pi R_3} & r=R_3\\ \frac{(1-\mu_3)I}{2\pi R_4} & r=R_4.\end{cases}$

> 介质界面与B垂直.

分界面上 $\vec{B}=\vec{B}_n$，$\vec{M}=\vec{M}_n$.

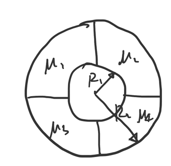
$\vec{i}'=\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=0$. 无磁化电流.

无介质时传导电流 i_0.

有介质时总电流 $i=i_0+i'$

$\vec{H}_i=\frac{1}{\mu_i}\vec{B}$.

例. 半径为 R_1. R_2 的导体构成同轴电缆，通一电流I，内部4种介质，求介质内B. H及磁化电流分布.



$\oint_C\frac{\vec{B}}{\mu_i}\cdot d\vec{l}=\sum I$，$\vec{B}=\frac{\mu_i I}{2\pi r}$

$\frac{B}{\mu_1}\times\frac{\pi}{2}r+\frac{B}{\mu_2}\times\frac{\pi}{2}r+\frac{B}{\mu_3}\times\frac{\pi}{2}r+\frac{B}{\mu_4}\times\frac{\pi}{2}r=I$.

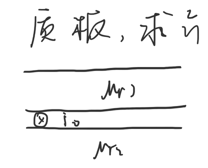
$\vec{B}=\frac{2I}{(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4})\pi r}$，$\vec{H}_i=\frac{2(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4})I}{\mu_i\pi r}$.

$i_1'=\vec{n}_1\times\vec{M}(R_1)=\frac{\mu_i-\mu_0}{\mu_0\mu_i}\vec{B}(R_1)$

$=\frac{2(\mu_i-\mu_0)I}{\mu_0\mu_i R_1(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4})}$

$i_2'=\vec{n}_2\times\vec{M}R_2=\frac{2(\mu_i-\mu_0)I}{\mu_0\mu_i R_2(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4})}$

例. 无限大薄板上电流 I_0 均匀分布，两侧各贴有 μ_{r1} 和 μ_{r2} 的均匀介质板，求介质内B与表面K'.



无介质. $\oint\vec{B}_0\cdot d\vec{l}=\mu_0 i_0 l$，

$B_0 2l=\mu_0 i_0 l$，$B_0=\frac{\mu_0 i_0}{2}$.

界面与B平行. $\vec{B}_i=\mu_{ri}\vec{B}_0=\frac{\mu_{ri}\mu_0 i_0}{2}$.

$\vec{M}_i=(\mu_{ri}-1)\vec{H}=(\mu_{ri}-1)\frac{\vec{B}_i}{\mu_{ri}\mu_0}=\frac{(\mu_{ri}-1)i_0}{2}$