稳恒电流

2022年4月7日 星期四　　上午10:45

一、稳恒条件

1. 电流：电荷的定向运动。
   运流电流、传导电流、极化电流。
   自由运动的电荷、维持运动的作用。

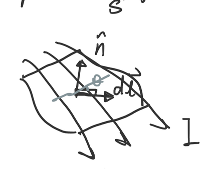
2. 电流的描述。

① 电流强度 $I=\frac{dQ}{dt}$。
单位时间流过横截面的电量。

② 体电流密度：

穿过面元 $d\vec{S}$ 的电流强度，
单位时间流经单位面积的电量。
$dI=\vec{j}\cdot d\vec{S}=j\,dS\cos\theta=j\,dS_\perp$。
A/m^2，矢量场。
> 穿过曲面 S 的电流强度 $I=\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$。

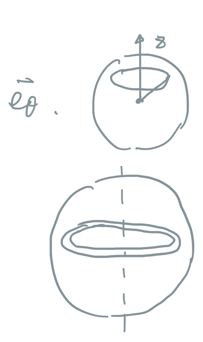
③ 面电流密度：



穿过线元 $d\vec{l}$ 的电流强度。
单位时间流经单位截线的电量。
$dI=K\,dl_\perp=K\,dl\cos\theta=d\vec{l}\cdot(\vec{K}\times\hat{n})=\vec{K}\cdot(\hat{n}\times d\vec{l})$
$dI=j\,dS_\perp=K\,dl_\perp$，$K=j\,d_\perp$
> 穿过曲线 C 的电流强度 $I=\int_C K\,dl_\perp$。

③ 电流与电荷。
$\vec{j}=nq\vec{v}=\rho\vec{v}$　载流体的密度
$K=\sigma\vec{v}$　定向漂移速度。
$I=\lambda\vec{v}$

例. 半径为 R、电荷体密度为 ρ 的球体以 ω 绕直径旋转，求球内体电流密度。



S_1. $\vec{j}=\rho\vec{v}=\rho\,\vec{\omega}\times\vec{r}=\rho\omega r\sin\theta\,\vec{e}_\theta$。
S_2. $\Delta Q=\rho\cdot 2\pi r\Delta S$
$\Delta I=\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\rho\omega r\Delta S$
$j=\frac{\Delta I}{\Delta S}=\rho\omega r$。
$\vec{j}=\rho\,\vec{\omega}\times\vec{r}$。

④ 极化电流。
电场变化，介质极化变化。
$\iint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}=\iint_S nq\vec{l}\cdot d\vec{S}=Q'(t)$。
穿过 S 的极化电荷量。
$I=\frac{dQ'}{dt}$，$\vec{j}_P=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$。

3. 电流连续方程。
$-\frac{dQ_{内}}{dt}=I$，$-\frac{d}{dt}\iiint_V\rho(\vec{r},t)dV=\oint_{S=\partial V}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$。
微分形式：$\nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$。
ρ 随时间的变化是 $\vec{j}$ 的源。

4. 稳恒条件。
① 稳恒的定义：电流密度不随 t 变化
$\frac{d}{dt}\iiint_V\rho\,dV=-\oint_{S=\partial V}\vec{j}(\vec{r})\cdot d\vec{S}=C\to 0$。
$\nabla\cdot\vec{j}=\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{dQ}{dt}=0$。
② 稳恒电流线：闭合、电路各处 I 相同。
③ 稳恒电场：不随时间变化
处理方式与静电场同。
导体内的稳恒电场通常不为零。
④ 稳恒电流法向分量连续。
$\hat{n}\cdot(\vec{j}_2-\vec{j}_1)=0$。

二、欧姆定律

1. 电子运动形成电流。
例. 铜导线中横截面积 $S=1\,mm^2$ 中通有 $I=10A$ 的电流，设铜原子平均贡献一个自由电子，估算电子运动 v。
电流密度 $j=\frac{I}{S}$。
自由电子数=铜原子数 $n=\frac{M}{M_A}=\frac{\rho V}{M}\times N_A$。
电子漂移速度 $v=\frac{j}{ne}$
* 电子热运动 $(\frac{1}{2}mu^2)=\frac{3}{2}kT$。

电子定向漂移 ⇒ 受外力驱使。
外力驱动 + 其他粒子碰撞阻碍 → 稳定 $\bar{v}$。

2. 欧姆定律。
① 微分形式
$\bar{v}\propto\vec{E}$，$\vec{E}\propto\vec{j}$，$\vec{j}=\sigma\vec{E}$，$\vec{E}=\vec{j}\rho$
$\rho=\frac{1}{\sigma}$，电阻率 & 电导率。
② 积分形式
$V=EL=I\frac{L}{\sigma S}=IR$。$(I=jS=\sigma ES)$
$V=IR$。

3. 焦耳定律。
① 微分形式。
导体内电场作用于单位体积电荷所耗功率 $p=\rho_e\vec{E}\cdot\vec{v}=\vec{E}\cdot\vec{j}$（密度）。
② 积分形式。
$p\Delta V=\vec{E}\cdot\vec{j}\Delta V=\vec{E}\cdot\vec{I}\Delta l$。
$P=\int\vec{E}\cdot\vec{I}\,dl=VI$。
③ 导体内电流分布遵循欧姆定律时，产生焦耳热最小。

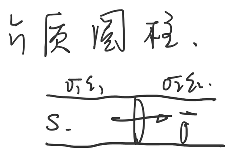
4. 欧姆定律的适用条件
欧姆型导体
理想绝缘体 $\sigma=0$，$\vec{j}=0$
理想导体 $\sigma=\infty$，$\vec{E}=0$。
良 / 不良导体
失效情况：E 过强 / 稀薄电离。
/ 反应堆效应。
⇒ 乘客电场不太强，能率变化不快。

5. 微观解释。
$\vec{j}=\sigma\vec{E}$，$\sigma=\frac{ne^2\tau}{m_e}$。

三、导电介质

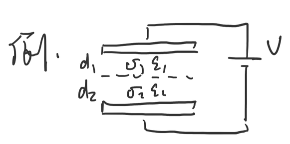
1. 导电介质的性质。
① 具有介质特性 & 导电特性。
满足介质基本规律 & 导电规律。
（极化）　（欧姆）
② 完备方程。
环路定律　$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$　$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$
稳恒条件　$\oint_S\vec{j}\cdot d\vec{S}=0$。　$\hat{n}\cdot(\vec{j}_2-\vec{j}_1)=0$。
导电介质　$\vec{j}=\sigma\vec{E}$。
极化　$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$。　$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q$。
③ 导电性质 → 电流 $\vec{j}$、电场 E 分布。
总电荷分布。
极化性质 → 自由 & 极化的份额。

例. 稳恒电流通过导电介质圆柱。
确定自由电荷分布。



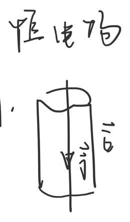
稳恒. $\vec{j}=\sigma_1\vec{E}_1=\sigma_2\vec{E}_2$，→ 电场
极化. $\vec{D}_1=\varepsilon_1\vec{E}_1$，$\vec{D}_2=\varepsilon_2\vec{E}_2$，
边值关系 $\sigma_e=\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1})\frac{I}{S}$。极化特性 → 自由 & 极化。自由电荷，$\varepsilon$ & σ。
$\sigma_e=\varepsilon_0\hat{n}\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\varepsilon_0(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1})\vec{j}$。总电荷，$\sigma$。导电特性 → 总电荷。

例.



$\vec{j}=\sigma_1\vec{E}_1=\sigma_2\vec{E}_2=\frac{I}{S}\hat{n}$。
$V=E_1d_1+E_2d_2=j(\frac{d_1}{\sigma_1}+\frac{d_2}{\sigma_2})$，$j=$ —

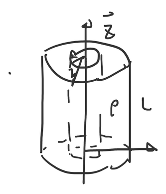
2. 导电介质中的场方程。
① 稳恒电场用标量势描述。$\vec{E}=-\nabla\varphi$。
例.



电势满足 $\nabla^2\varphi=0$。
$\varphi(z=0)=0$，$\varphi(z=L)=V$
$\hat{n}\cdot\vec{j}=0\Rightarrow\hat{n}\cdot\vec{E}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$　} 边值条件
唯一性定理猜测 $\varphi(z)=\frac{z}{L}V$。

② 等势面间的电阻。
固定电阻. $R=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{I}$。（$\varphi$ 变 k 倍，I 变 k 倍）。
适用于稳恒电流。
计算：对某特定电流分布 $R=\frac{\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\iint_S\vec{j}\cdot d\vec{S}}$。
若每一横截面电流均匀，$\iint_S\vec{j}\cdot d\vec{S}=jS_\perp$。
$\therefore R=\int_1^2\frac{E\,dl}{jS_\perp}=\int_1^2\frac{dl}{\sigma S_\perp}=\int_1^2\frac{\rho\,dl}{S_\perp}\to\frac{\rho L}{S_\perp}$

例.

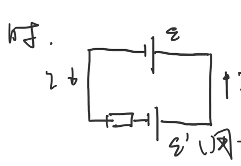


沿轴线方向、沿径向计算柱体电阻。
沿 z　$R=\frac{\rho L}{S}=\frac{\rho L}{\pi(b^2-a^2)}$
沿 r.　$R=\int_a^b\frac{\rho\,dr}{2\pi rL}=\frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{b}{a}$。
* $C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(\frac{b}{a})}$，$RC=\rho\varepsilon$。
两个电极：$R=\frac{\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\iint_S\vec{j}\cdot d\vec{S}}=\rho\frac{\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\iint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}}$
$C=\frac{\iint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}}{\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{l}}=\varepsilon\frac{\iint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}}{\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{l}}$
$\therefore RC=\rho\varepsilon$。普适规律。

四、电源与电动势

1. 电路特点。
电流闭合，电场（线）不闭合。

2. 全电路欧姆定律。
① 电荷受静电力与非静电力作用。
$\vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{K})$，$\vec{K}$ 为非静电力
电源内部 $\vec{K}\neq 0$。
② 电动势 $\varepsilon=\int_-^+\vec{K}\cdot d\vec{l}$。
可定义闭合回路电动势 $\varepsilon=\oint_L\vec{K}\cdot d\vec{l}$。
③ 路端电压。$V=\varphi_+-\varphi_-=\int_+^-\vec{E}\cdot d\vec{l}$。
（与积分路径无关）。
$\vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{K})$，$\vec{E}=\rho\vec{j}-\vec{K}$，
$\therefore V=\begin{cases}\int_{+内}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}-\int_{+内}\vec{K}\cdot d\vec{l}=\varepsilon+\int_+^-\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}\\ \int_{+外}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}\end{cases}$
开路时 $\vec{j}=0$，$V=\varepsilon$。
放电时　$V_{内}=\varepsilon-\int_+^-\rho j\,dl=\varepsilon-\int_+^-\rho\frac{jS}{S}dl$　内部 $\vec{j}$ 与 $\vec{E}$ 相反。
$=\varepsilon-I\int_+^-\frac{\rho\,dl}{S}=\varepsilon-Ir$ → 内阻
$V_{外}=\int_+^-\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}=\int_+^-\rho j\,dl=\int_+^-\rho\frac{jS}{S}dl$
$=I\int_+^-\frac{\rho\,dl}{S}=IR$。
$V=\varepsilon-Ir=IR$。
充电时.



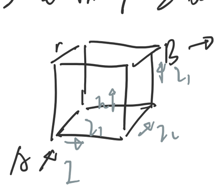
$V_{内}=\varepsilon+Ir$　电流方向。
$V_{外}=\varepsilon'-Ir-IR$。
$V=\varepsilon+Ir=\varepsilon'-Ir'-IR$。

3. 常见电源.
化学电源、太阳电源。

五、基尔霍夫定律

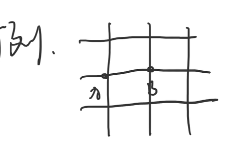
1. 基本概念。
节点：3 条导线汇合点。
支路：相邻节点间通路。
回路：起终点重合。
独立回路数目=支路+节点-1=网孔数（平面）
2. 第一定律（节点定律）
任意节点电流代数和为零。
$\sum I_k=0$。
第二定律（回路定律）。
3. 适用范围。
恒定电流。
似稳。
交流 → 瞬时值。

例. 回路电流 / 支路电流 / 叠加。
例. 对称性.



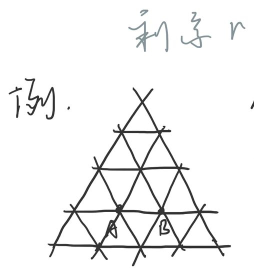
假设 I 从 A 入 B 出。
则有 $I=3I_1$，$I_1=2I_2$。
$\therefore U_{AB}=I_1r+I_2r+I_1r=\frac{1}{3}Ir+\frac{1}{6}Ir+\frac{1}{3}Ir=\frac{5}{6}Ir$。
$\therefore R_{AB}=\frac{U}{I}=\frac{5}{6}r$。

例.

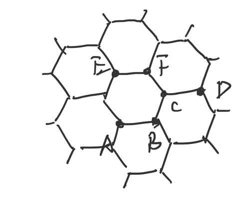


I 从 A 流入，$I_{AB1}=\frac{1}{4}I$。
I 从 B 流出，$I_{AB2}=\frac{1}{4}I$。
$\therefore I_{AB}=\frac{1}{2}I$。$U_{AB}=IR_{AB}=\frac{1}{2}Ir$。$R_{AB}=\frac{1}{2}r$。
* 去掉 AB 间的 r。
原：剩余电路与 r 并联，$R_{AB}=\frac{1}{2}r$。
则剩余电路为 r。
* AB 间改为 R。
剩余 r 与 R 并联，$R_{AB}=\frac{Rr}{R+r}$。

例.

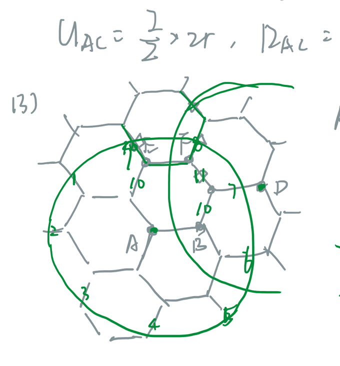


AB 间等效电阻。
A 流入 I，$I_{AB1}=\frac{I}{6}$。
B 流出 I，$I_{AB2}=\frac{I}{6}$。
$U_{AB}=\frac{I}{3}r$，$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{1}{3}r$。



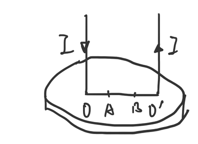
AB 间等效电阻。
AC 间等效电阻。
AD 间电流为 I，EF 间电流 __。

(1) A 流入 I，$I_{AB1}=\frac{1}{3}I$。
B 流出 I，$I_{AB2}=\frac{1}{3}I$。
$U_{AB}=\frac{2}{3}Ir$，$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{2}{3}r$。
(2) A 流入 I，$I_{AB1}=\frac{1}{3}I$，$I_{BC1}=\frac{I}{6}$，$I_{B'}=\frac{I}{6}$。
C 流出 I，$I_{BC2}=\frac{1}{3}I$，$I_{AB2}=\frac{I}{6}$，$I_{B'}=\frac{I}{6}$。
$U_{AC}=\frac{I}{2}\times 2r$，$R_{AC}=\frac{U_{AC}}{I}=r$。
(3)

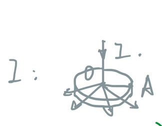


A 流入 I.
$3I_8+6I_9=I$。
$I_{10}=I_9+I_{EF_1}$
$I_{EF_1}+I_{11}=I_8$
$I_{10}=I_{11}+I_7=I_{11}+I_9$
$\therefore I_{EF_1}=\frac{1}{2}I_8$
$6I_{EF_1}+6I_9=I$。
D 流出 I.
$6I_{EF_2}+3I_{D'}=6I_{EF_2}+3I_8=I$。
$\therefore 6(I_{EF_2}+I_{EF_1})=6I_{EF}=I$。
$\therefore I_{EF}=\frac{1}{6}I$。

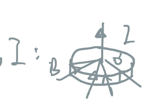
例. 无限大平面金属膜，厚度为 a，电阻率为 ρ，电流 I 从 O 点流入，O' 点流出，OO' 间距为 d，$AO=r_1$，$BO'=r_2$，求 AB 之间的电阻.



从 O 流入 I：

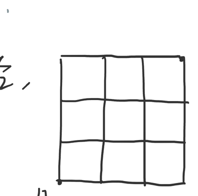


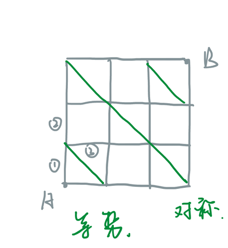
$j=\frac{I}{2\pi r_1 a}$
$E=\frac{\rho j}{2\pi r_1 a}$.
$U_{AB1}=\int_{r_1}^{d-r_2}E\,dr=\frac{\rho I}{2\pi a}\ln\frac{d-r_2}{r_1}$
从 O' 流出 I：



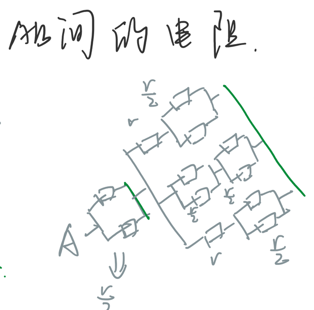
$j'=\frac{I}{2\pi r_2 a}$，$E'=\frac{\rho I}{2\pi r_2 a}$.
$U_{AB2}=\int_{r_2}^{d-r_1}E'\,dr=\frac{\rho I}{2\pi r_2 a}\ln\frac{d-r_1}{r_2}$.
$R_{AB}=\frac{U_{AB1}+U_{AB2}}{I}=\frac{\rho}{2\pi a}\ln\frac{(d-r_1)(d-r_2)}{r_1r_2}$.

例. 24 个相同电阻联成方格，试求对角 AB 间的电阻。





等势.　对称.



$\frac{3}{2}r$ 并 $\frac{3}{2}r$ $=\frac{3}{4}r$.
$\therefore R=2\times(\frac{r}{2}+\frac{\frac{3}{4}r\times r}{\frac{3}{4}r+r})=r+\frac{6}{7}r$